Etude de branches infinies.

1 Démarche

Étant donnée une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, l'étude de ses branches infinies a pour objectif de comprendre en détails le comportement de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.

La première chose à faire est donc de calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. On peut alors donner une première interprétation des différents résultats que l'on peut obtenir pour ce calcul. On distingue principalement deux types de résultats possibles.

(Remarque : ici, on travaillera autour de $+\infty$, mais l'on pourrait faire exactement la même chose autour de $-\infty$).

Premier cas. Cette limite est finie : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$.

On conclue alors que la courbe admet une *asymptote horizontale* d'équation $y = \ell$ en $+\infty$ et l'étude est terminée.

Exemples :

$$f(x) = \frac{1}{x}, \qquad g(x) = xe^{-x}, \qquad h(x) = \frac{2x^2+1}{x^2+3}$$

Second cas. Cette limite est infinie : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

La fonction f n'admet alors pas d'asymptote horizontale en $+\infty$ et l'on doit poursuivre l'étude pour étudier de plus près le comportement de $f(x)$ autour de $+\infty$. Intuitivement, le calcul de $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ nous dit dans ce cas là que $f(x)$ grandit quand x grandit. Les questions qui se pose à ce moment là sont : "à quelle vitesse grandit $f(x)$? Grandit-elle plus vite ou moins vite que x ?"

Là encore, un calcul de limite va pouvoir nous aider à répondre : pour comparer la croissance de $f(x)$ et celle de x, on calcule $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$.

Le comportement de la fonction f autour de $+\infty$ dépendra alors du type de réponse obtenu mais contrairement à tout à l'heure, on distingue ici trois types de réponses possibles (et non plus deux).

- Soit $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$. Dans ce cas, $f(x)$ grandit moins vite que x.
  Exemples :
$$f(x) = \ln(x), \qquad g(x) = \sqrt{x}, \qquad h(x) = \frac{x^2+1}{2\sqrt{x}-3}.$$

On dit que la courbe de f admet une branche parabolique d'axe (Ox).

– Soit $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$. Dans ce cas, $f(x)$ grandit plus vite que x.
Exemples :

$$f(x) = e^x, \qquad g(x) = x^2, \qquad h(x) = \frac{x^4 + 2x^3 - 1}{x^2 + 4}.$$

On dit que la courbe de f admet une branche parabolique d'axe (Oy).

– Soit $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}^*$. Dans ce cas, la vitesse de croissance de $f(x)$ est comparable à celle de ax quand x grandit. Pour effectuer cette comparaison, on étudie une dernière limite : celle de la différence $f(x) - ax$ et on distingue deux cas :

  – Soit $\lim_{x \to +\infty} f(x) - ax = b \in \mathbb{R}$ et la courbe de f admet la droite d'équation $y = ax + b$ pour asymptote oblique.
  Exemples :

$$f(x) = \frac{x^3 + x + 1}{x^2 + 4}, \qquad g(x) = x(\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 + 1}), \qquad h(x) = x^2 \ln\left(\frac{x + 2}{x}\right).$$

  – Soit $\lim_{x \to +\infty} f(x) - ax = \pm\infty$ et la courbe de f admet une branche parabolique de direction $y = ax$.
  Exemples :

$$f(x) = x + \sqrt{x}, \qquad g(x) = x\left(\frac{2\ln x + 1}{\ln x}\right).$$

****

Résumé :

1. Calcul de $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.
   - Si c'est un réel ℓ, asymptote d'équation $y = \ell$.
   - Si c'est $+\infty$, passer à l'étape 2.

2. Si le résultat précédent est $+\infty$, calcul de $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.
   - Si c'est 0 ou $+\infty$, pas d'asymptote mais une branche parabolique.
   - Si c'est un réel a non nul, passer à l'étape 3.

3. Si le résultat précédent est un nombre non nul $a \in \mathbb{R}^*$, calcul de $\lim_{x \to +\infty} f(x) - ax$.
   - Si c'est un réel b, la droite d'équation $y = ax + b$ est alors asymptote à la courbe de f.
   - Si c'est $+\infty$, pas d'asymptote mais une branche parabolique d'axe oblique.

2 Exercices

Exercice 1 Étudier le comportement asymptotique des fonctions suivantes.

$$g(x) = \frac{\cos(x)}{x}, \qquad h(x) = \frac{\sqrt{9x^4 + 3x^3 - 1}}{x^2 + 1}.$$

****

Exercice 2 Étudier le comportement à l'infini des fonctions suivantes

$$f : x \longmapsto \frac{2x^3 + x - 1}{x^2 + 1}, \qquad g(x) = \frac{\sqrt{x^9 + 2x}}{x^2 - 1}$$

****

Exercice 3 Soient f et g définies par

$$f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{x}\right), \qquad g(x) = x + 2\ln\left(\frac{1+x}{x}\right).$$

1. Étudier le comportement de f autour de $+\infty$. Donner l'équation de l'éventuelle asymptote.
2. À l'aide de la question précédente, étudier le comportement de la fonction g en $+\infty$.

3 Complements

En réalité, l'étude des branches infinies d'une fonction f pourrait se résumer à la question suivante :

"Existe-t-il une fonction plus simple que f qui se comporte comme f autour de $+\infty$?"

Pour répondre à cela, on cherche donc une fonction g plus simple telle que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - g(x) = 0.$$

Dans la première partie, on se contente de comparer f avec des fonctions affines (i.e. des droites). Mais rien ne nous empeche de comparer f à des fonctions plus complexes.

Exercice 4 Montrer que les courbes associées aux fonctions $f : x \mapsto \sqrt{x^4 + \sin(x)}$ et $g : x \mapsto x^2$ sont asymptotiques.

****

Exercice 5 Montrer que les courbes des fonctions suivantes sont asymptotiques.

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$