CONTRÔLE CONTINU

Algèbre linéaire

Durée : 1h30. *Les calculatrices sont autorisées.*

Tous les exercices sont indépendants.
Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation.

Exercice 1 Soient E un espace vectoriel et $f : E \to E$ une application linéaire.

1. Compléter les définitions suivantes :

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(f) &= \{v \in E \;/\; ....\} \\ \mathrm{Ker}(f) &= \{v \in E \;/\; ....\} \end{aligned}$$

2. Soient λ une valeur propre de f et E_λ le sous espace propre associé.
   (a) Compléter la définition suivante :

$$E_\lambda = \{v \in E \;/\; ....\}$$

   (b) Montrer que E_λ est un sous espace vectoriel de E.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 On se place dans le plan, muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O\ ;\ \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et l'on note f l'application linéaire du plan dans lui même dont la matrice dans $\mathcal{R}$ est

$$M = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

1. On considère l'octogone régulier $\mathcal{O} = (ABCDEFGH)$ défini par

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} \quad B = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} \quad C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} \quad D = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$$

$$E = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} \quad F = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} \quad G = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} \quad H = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$$

   (voir repère ci-joint).
   (a) Calculer et placer dans le repère ci-joint les images $f(A)$, $f(B)$, $f(C)$ et $f(D)$.

   (b) En déduire les images $f(E)$, $f(F)$, $f(G)$ et $f(H)$ et tracer l'image de l'octogone $\mathcal{O}$ par f.

2. (a) Montrer que les valeurs propres de f sont
$$\lambda_1 = 2 \qquad \text{et} \qquad \lambda_2 = \frac{3}{4}.$$
   (b) Déterminer les sous espaces propres associés à chacune de ces valeurs propres (on en donnera la dimension ainsi qu'une base).
   (c) Donner une matrice diagonale D et une matrice de passage P telles que $P^{-1}.M.P = D$.
3. Tracer dans le repère ci-joint les deux sous espaces propres déterminés à la question 2 et commenter.

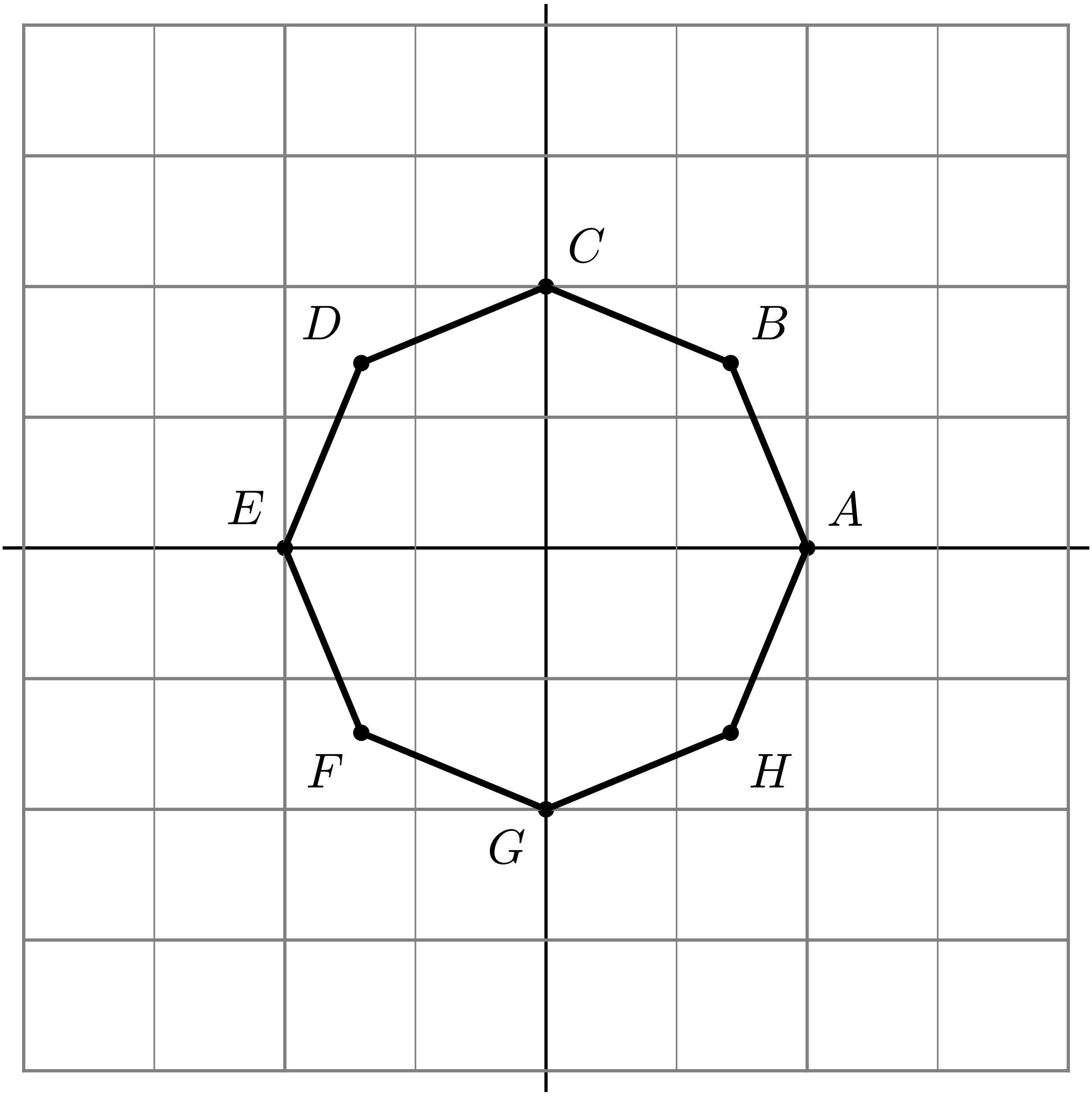
⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 On se place dans $\mathbb{R}^3$, muni de sa base canonique
$$\mathcal{B} = \{\overrightarrow{e_1} = (1,0,0), \overrightarrow{e_2} = (0,1,0), \overrightarrow{e_3} = (0,0,1)\}$$
et l'on considère les vecteurs
$$\overrightarrow{u_1} = (1,-1,0), \quad \overrightarrow{u_2} = (1,1,1), \quad \overrightarrow{u_3} = (0,1,1).$$

1. (a) Montrer que la famille $\mathcal{B}' = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Écrire la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et montrer que
$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$
2. Soit
$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & & (x,y,z) & \longmapsto & (x+3y-3z, x-y+z, x+y-z) \end{array}$$
   (a) Calculer $f(\overrightarrow{e_1})$, $f(\overrightarrow{e_2})$ et $f(\overrightarrow{e_3})$ et en déduire la matrice A de f dans $\mathcal{B}$.
   (b) À l'aide d'un produit de matrices, montrer que la matrice de f dans $\mathcal{B}'$ est
$$A' = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
   (c) Montrer, en se plaçant dans $\mathcal{B}'$ que $\mathrm{Ker}(f)$ est une droite et en donner un vecteur directeur (sous la forme d'un triplet de $\mathbb{R}^3$).
   (d) Montrer que $\mathrm{Im}(f)$ est le plan de $\mathbb{R}^3$ engendré par $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\}$.

⋆ ⋆
⋆

Nom : .... Prénom : ....



CORRECTION

Exercice 1 :

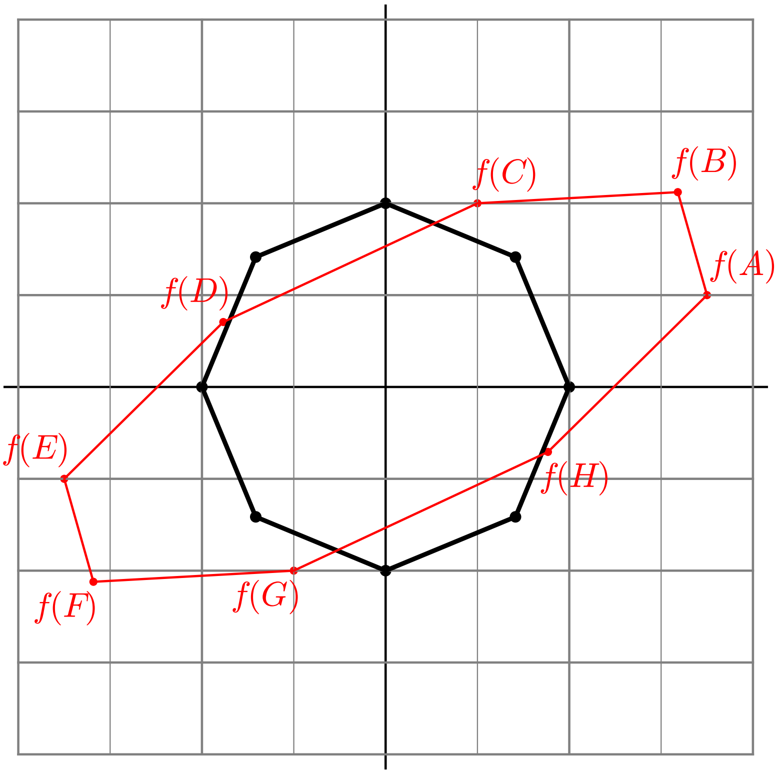
1.
$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(f) &= \{v \in E \ / \ \exists u \in E \ / \ v = f(u)\} \\ \mathrm{Ker}(f) &= \{v \in E \ / \ f(v) = 0_E\}\end{aligned}$$

2. Soient λ une valeur propre de f et E_λ le sous espace propre associé.
   (a) Compléter la définition suivante :
   $$E_\lambda = \{v \in E \ / \ f(v) = \lambda v\}$$
   (b) – $f(0) = 0 = \lambda.0$. Donc $0 \in E_\lambda$.
   – Soient $u, v \in E_\lambda$ et $k, \ell \in \mathbb{R}$. Montrons que $k.u + \ell.v \in E_\lambda$.
   Puisque f est linéaire, on a
   $$f(k.u + \ell.v) = k.f(u) + \ell.f(v).$$
   Or puisque $u, v \in E_\lambda$, on a $f(u) = \lambda.u$ et $f(v) = \lambda.v$. Donc
   $$f(k.u + \ell.v) = k.\lambda.u + \ell.\lambda.v = \lambda.(k.u + \ell.v)$$
   Autrement dit, $k.u + \ell.v$ est bien un vecteur de E_λ.
   On a montré que E_λ contient le vecteur nul et est stable par combinaisons linéaires. C'est donc un SEV de E.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 :

1. (a) Pour calculer les images, on utilise la matrice M :
   $$f(A) = M \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$$
   De même, on calcule
   $$f(B) = \frac{3\sqrt{2}}{8}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}, \quad f(C) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}, \quad f(D) = \frac{\sqrt{2}}{8}\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$$
   Enfin, les quatre derniers vecteurs étant les opposés des quatre premiers, et f étant linéaire, on a
   $$f(E) = -f(A) = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}, \quad f(F) = -\frac{3\sqrt{2}}{8}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}},$$
   $$f(G) = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}, \quad f(H) = -\frac{\sqrt{2}}{8}\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$$
   (b)



2. (a) Les valeurs propres de f sont les racines du polynôme $P(\lambda)=\det(M-\lambda.I_2)$:

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \begin{vmatrix} \frac{7}{4}-\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1-\lambda \end{vmatrix} = \left(\frac{7}{4}-\lambda\right)(1-\lambda)-\frac{1}{4} \\ &= \lambda^2-\frac{11}{4}\lambda+\frac{3}{2} \\ &= \frac{1}{4}(4\lambda^2-11\lambda+6) \end{aligned}$$

Les vap de f sont donc les racines de $4\lambda^2-11\lambda+6$, dont le discriminant est

$$\Delta = 11^2-4.6.4=25$$

Ainsi, les valeurs propres de f sont

$$\lambda_1=\frac{11+\sqrt{25}}{2\times 4}=2 \qquad \text{et} \qquad \lambda_2=\frac{11-\sqrt{25}}{2\times 4}=\frac{3}{4}$$

(b) – $\underline{E_2}$:

$$\begin{aligned} MX=2X &\iff \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 8\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} 7x+2y &= 8x \\ 2x+4y &= 8y \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -x+2y &= 0 \\ 2x-4y &= 0 \end{cases} \\ &\iff x-2y=0 \end{aligned}$$

E_2 est donc la droite d'équation $y=\frac{1}{2}x$ dont un vecteur directeur est $\overrightarrow{e_1}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$.

– $\underline{E_{\frac{3}{4}}}$:

$$\begin{aligned} MX = \frac{3}{4}X &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 7x + 2y & = & 3x \\ 2x + 4y & = & 3y \end{array} \right. \\ &\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 4x + 2y & = & 0 \\ 2x + y & = & 0 \end{array} \right. \\ &\Longleftrightarrow 2x + y = 0 \end{aligned}$$

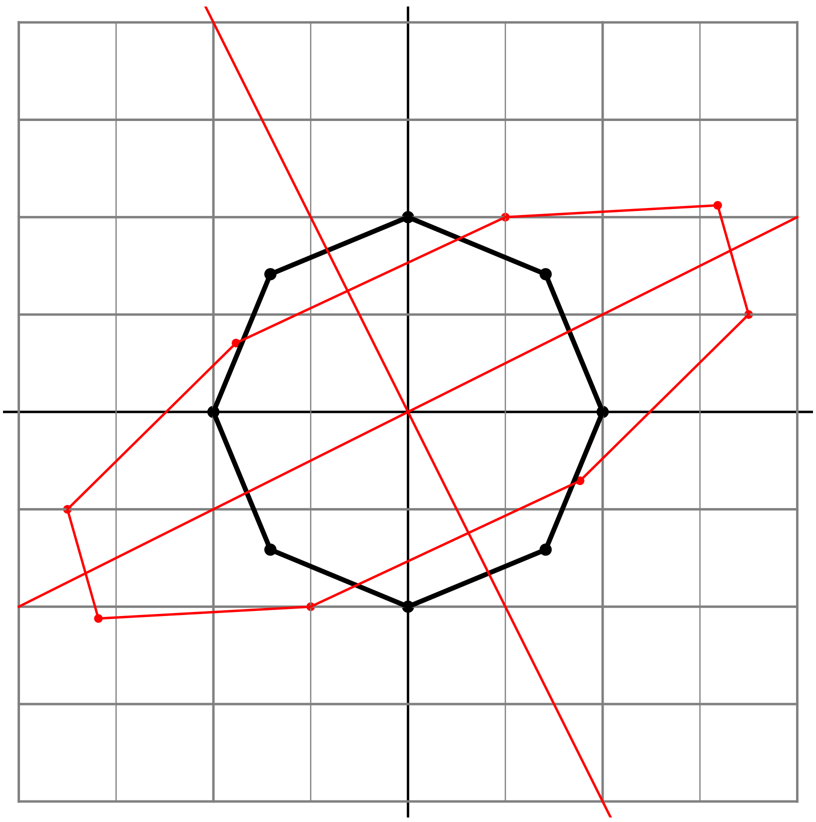
$E_{\frac{3}{4}}$ est donc la droite d'équation $y = -2x$ dont un vecteur directeur est $\overrightarrow{e_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$.

(c) D'après les calculs précédents, en notant

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

on a $P^{-1}MP = D$.

3. En ajoutant les deux droites au dessin, on obtient



On constate que l'octogone est étiré dans le sens de E_2 (car $\lambda_1 = 2 > 1$) et contracté dans le sens de $E_{\frac{3}{4}}$ (car $\lambda_2 = \frac{3}{4} < 1$).

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 :

1. (a) La famille $\mathcal{B}'$ contenant trois vecteurs (dans $\mathbb{R}^3$), elle forme une base de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si elle est libre. Pour cela, il faut et il suffit que le déterminant de la matrice formée des coordonnées des $\overrightarrow{u_i}$ soit non nul. Or

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1.\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - (-1).\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

La famille $\mathcal{B}'$ est donc libre et c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

(b) La matrice P est précisément la matrice dont on vient de calculer le déterminant :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

En multipliant cette matrice par la matrice proposée pour P^{-1}, on obtient la matrice I_3, ce qui prouve ce que l'on veut montrer.

2. (a)

$$\begin{aligned} f(\overrightarrow{e_1}) &= f(1,0,0) &= (1,1,1) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \\ f(\overrightarrow{e_2}) &= f(0,1,0) &= (3,-1,1) &= \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \\ f(\overrightarrow{e_3}) &= f(0,0,1) &= (-3,1,-1) &= \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

La matrice de f dans $\mathcal{B}$ est donc

$$A = M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(b) D'après la formule de changement de bases pour les applications linéaires, la matrice de f dans $\mathcal{B}'$ est

$$A' = P^{-1} \times A \times P$$

En effectuant le calcul, on obtient

$$A' = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) Le noyau de f est l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$ tels que

$$A' \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcl} -2x & & & = & 0 \\ & & y & = & 0 \end{array} \right.$$

Le noyau de f est donc l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$. Il s'agit donc de la droite portée par $\overrightarrow{u_3} = (1, -1, 0)$:

$$\mathrm{Ker}(f) = \{(x, -x, 0),\ x \in \mathbb{R}\}.$$

(d) D'après la question précédente, le noyau de f est de dimension 1. On en déduit que la dimension de $\mathrm{Im}(f)$ est $3 - 1 = 2$.

D'autre part, $\mathrm{Im}(f)$ est engendré par les colonnes de n'importe quelle matrice de f. Ainsi, $\mathrm{Im}(f)$ est engendrée par $f(u_1) = -2u_1$ et $f(u_2) = u_2$ et donc par u_1 et u_2.

⋆ ⋆
⋆