# CONTRÔLE CONTINU

Algèbre linéaire

Durée : 1h30 *Les calculatrices sont autorisées.*

Tous les exercices sont indépendants.
Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation.

**Exercice 1** *Un peu de théorie*

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (\mathcal{O}\,;\ \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on note $\rho$ la rotation de centre $\mathcal{O}$ et d'angle $\theta$. Donner la matrice de $\rho$ dans la base $\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\}$ (on pourra commencer par faire un dessin).

2. Soit $A$ une matrice carrée $n \times n$. Montrer que l'ensemble des solutions du système linéaire homogène $A \times X = 0$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

3. Discuter de la validité des affirmations suivantes. Pour les affirmations vraies on donnera une justification rapide et pour les fausses, on donnera un contre exemple.

   (a) Toute famille de $n$ vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

   (b) Toute matrice admet au moins une valeur propre (éventuellement complexe).

   (c) Les sous espaces propres d'un endomorphisme sont tous des espaces vectoriels.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

**Exercice 2** *Une transformation de l'espace*

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (\mathcal{O}\,;\ \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ et on note $f$ l'endomorphisme de l'espace dont la matrice dans la base $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\}$ est

$$M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

On admet que le polynôme caractéristique de $f$ est $P(\lambda) = -(\lambda - 1)^2(\lambda + 1)$ et que

$$\mathrm{Spec}(f) = \{-1, 1\}$$

1. Déterminer les sous espaces propres associés à chacune des valeurs propres et donner leurs dimensions.
2. Donner une base orthonormée de chacun des sous espaces propres de $f$ et montrer que la famille $\{e_1, e_2, e_3\}$ ainsi obtenue est une base orthonormée de l'espace.
3. Donner sans calcul la matrice de $f$ dans cette nouvelle base.
4. À quelle transformation de l'espace correspond l'application $f$ ?

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

**Exercice 3** *Un système dynamique*

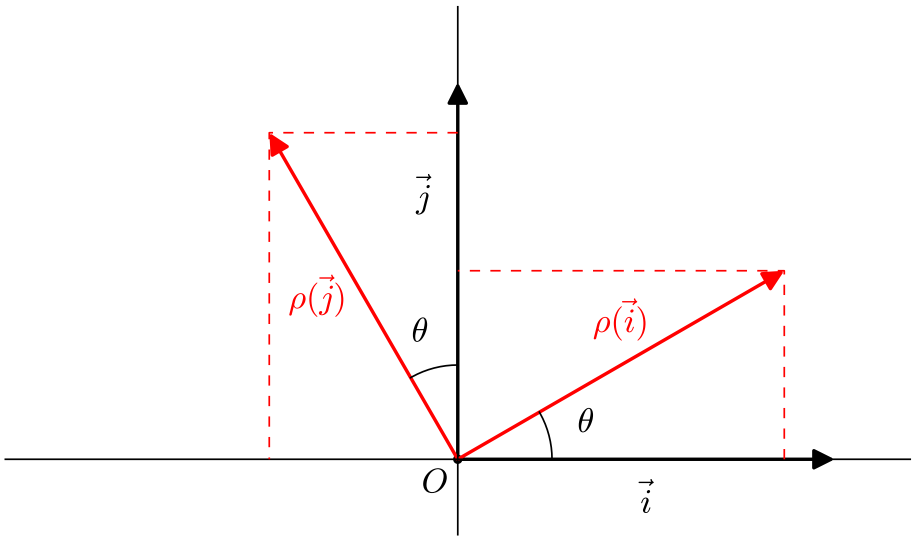
1. Soit $A$ la matrice définie par $A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que les valeurs propres de $A$ sont $\lambda_1 = 1$ et$\lambda_2 = \dfrac{2}{5}$. La matrice $A$ est-elle diagonalisable ? (Justifier)
   (b) Déterminer une matrice $P$ inversible telle que le produit $P^{-1} \times A \times P$ soit une matrice diagonale $D$ à préciser.
   (c) Montrer par récurrence que
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{2}{5}\right)^n \end{pmatrix}$$
   (on admet que $D^0 = I_2$) puis que
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad A^n = P \times D^n \times P^{-1}$$
   (d) En déduire $A^n$ explicitement en fonction de $n$ (on rappelle que si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible, alors $M^{-1} = \frac{1}{\det(M)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$).
2. On considère un réservoir à deux compartiments séparés par une parois poreuse.
   En observant ce réservoir, on constate que chaque jour, un cinquième de l'eau contenue dans le premier compartiment passe dans le second et deux cinquièmes de l'eau contenue dans le second compartiment passent dans le premier.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $x_n$ la quantité d'eau présente dans le premier compartiment et $y_n$ la quantité d'eau présente dans le second compartiment au $n$-ième jour.
   (a) En notant $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$, exprimer $X_{n+1}$ en fonction de $X_n$ et de $A$.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $X_n = A^n \times X_0$.
   (c) En déduire la quantité d'eau présente dans chaque compartiment du réservoir au $n$-ième jour en fonction de $n$ et de la répartition au premier jour.
   (d) Donner la répartition d'eau dans chacun des compartiments au bout d'un temps infini.

⋆ ⋆
⋆

# CORRECTION

**Exercice 1** :

1. Pour construire la matrice de $\rho$ dans la base $\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\}$, il nous faut les coordonnées dans $\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\}$ des images $\rho(\overrightarrow{i})$ et $\rho(\overrightarrow{j})$. Or sur le dessin ci-dessous, on a représenté le repère $\mathcal{R}$ et les deux images $\rho(\overrightarrow{i})$ et $\rho(\overrightarrow{j})$.




D'après les règles de trigonométrie dans le triangle rectangle, on lit

$$\begin{aligned}
\rho(\overrightarrow{i}) &= \cos(\theta)\overrightarrow{i} + \sin(\theta)\overrightarrow{j} &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} \\
\rho(\overrightarrow{j}) &= -\sin(\theta)\overrightarrow{i} + \cos(\theta)\overrightarrow{j} &= \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}
\end{aligned}$$

La matrice de $\rho$ dans la base $\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\}$ est donc

$$M(\rho) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

2. Soit $AX = 0$ un système linéaire homogène et $S$ l'ensemble de ses solutions.

   - $A \times \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$. Le vecteur nul appartient donc à $S$ et $S$ est non vide.
   - Soient $X$ et $Y$ deux solutions de $S$ et soient $\lambda$ et $\mu$ des réels. On a $A \times X$ et $A \times Y$. Mais alors
   $$A \times (\lambda X + \mu Y) = \lambda.A \times X + \mu.A \times Y = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{0} = 0$$

   Ainsi, $S$ est non vide et stable par combinaisons linéaires. C'est donc un sous espace vectoriel de $S$.

3. (a) FAUX. Si cette famille contient le vecteur nul, ou si deux vecteurs sont colinéaires, ou plus généralement si l'un des $n$ vecteurs peut s'écrire en fonction des autres.

(b) VRAI. Les valeurs propres d'une matrice $M$ sont les racines du polynôme $\det(M - \lambda I)$. Il s'agit d'un polynôme de degré $n \geqslant 1$. Il admet donc au moins une racine complexe. $M$ admet donc au moins une valeur propre.

(c) VRAI. Ce sont des les solutions d'un système linéaire de la forme $A \times X = 0$. D'après la question 2, il s'agit d'un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

**Exercice 2** :

1. Les sous espaces propres de $f$ sont les vecteurs solutions des système $AX = X$ et $AX = -X$. Ainsi,
   - $E_1$ :

$$AX = X \Leftrightarrow 3AX = 3X \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & 2y & + & z & = & 3x \\ -2x & - & y & + & 2z & = & 3y \\ x & + & 2y & + & 2z & = & 3z \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -x & - & 2y & + & z & = & 0 \\ -2x & - & 4y & + & 2z & = & 0 \\ x & + & 2y & - & z & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow x + 2y - z = 0$$

Le sous espace propre $E_1$ est donc le plan d'équation $x + 2y - z = 0$. De ce plan, on peut extraire deux vecteurs orthogonaux. Pour cela, on commence par tirer un premier vecteur au hasard :

$$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (x = 1 \text{ et } y = 0)$$

On cherche ensuite un second vecteur $\varepsilon_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $E_1$ orthogonal au premier. Ses coordonnées doivent donc vérifier le système

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcll} x & + & 2y & - & z & = & 0 & (\varepsilon_2 \in E_1) \\ x & & & + & z & = & 0 & (\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 = 0) \end{array} \right.$$

Les solutions de ce système sont les vecteurs de la forme $\begin{pmatrix} x \\ -x \\ -x \end{pmatrix}$. En posant alors $\varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, on obtient une base orthogonale du plan $E_1$. On transforme alors $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ en une base orthonormée en divisant chacun des vecteurs par sa norme :

$$e_1 = \frac{\varepsilon_1}{||\varepsilon_1||} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad e_2 = \frac{\varepsilon_2}{||\varepsilon_2||} = \frac{\sqrt{3}}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

– $E_{-1}$ :

$$AX=-X \Leftrightarrow 3AX=-3X \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lllllll} 2x & - & 2y & + & z & = & -3x \\ -2x & - & y & + & 2z & = & -3y \\ x & + & 2y & + & 2z & = & -3z \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lllllll} 5x & - & 2y & + & z & = & 0 \\ -2x & + & 2y & + & 2z & = & 0 \\ x & + & 2y & + & 5z & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lllllll} -x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & 2y & + & 5z & = & 0 \\ 5x & - & 2y & + & z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lllllll} -x & + & y & + & z & = & 0 \\ & & 3y & + & 6z & = & 0 \\ & & 3y & + & 6z & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lll} x & = & y+z=-z \\ y & = & -2z \end{array}\right.$$

D'où $E_{-1}=\{(-z,-2z,z),\ z\in\mathbb{R}\}$. De cette droite, on tire un vecteur $\varepsilon_3=\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}$ que l'on divise par sa norme pour obtenir un vecteur de norme 1 :

$$e_3=\frac{\sqrt{6}}{6}\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}$$

2. Pour vérifier que la famille $\{e_1,e_2,e_3\}$ forme une BON de l'espace, il reste à vérifier que $e_3$ est orthogonal à $e_1$ et $e_2$. Or

$$e_1\cdot e_3=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\cdot\frac{\sqrt{6}}{6}\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}=\frac{\sqrt{12}}{12}(-1+1)=0$$

et

$$e_2\cdot e_3=\frac{\sqrt{3}}{3}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}\cdot\frac{\sqrt{6}}{6}\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}=\frac{\sqrt{18}}{18}(-1+2-1)=0$$

3. Les vecteurs $e_1$, $e_2$ et $e_3$ étant des vecteurs propres de $f$, la matrice de $f$ dans la base $\{e_1,e_2,e_3\}$ est une matrice diagonale $D$ dont les termes diagonaux sont les valeurs propres de $f$ :

$$D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

4. Dans la matrice $D$, on lit que si l'on applique $f$ à un vecteur de l'espace, l'application conserve les coordonnées en $e_1$ et $e_2$ et transforme la coordonnée en $e_3$ en son opposée. $f$ est donc la symétrie orthogonale par rapport au plan $E_1$.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

**Exercice 3** :

1. (a) Les valeurs propres de $A$ sont les racines du polynôme $P(\lambda) = \begin{vmatrix} \frac{4}{5}-\lambda & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5}-\lambda \end{vmatrix}$. Or

$$\begin{vmatrix} \frac{4}{5}-\lambda & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5}-\lambda \end{vmatrix} = \left(\frac{4}{5}-\lambda\right)\left(\frac{3}{5}-\lambda\right) - \frac{2}{25} = \lambda^2 - \frac{7}{5}\lambda + \frac{2}{5} = (\lambda-1)\left(\lambda - \frac{2}{5}\right)$$

On a donc bien $\mathrm{Spec}(A) = \left\{1, \frac{2}{5}\right\}$ et toutes ces valeurs propres sont d'ordre 1. La matrice $A$ est donc diagonalisable.

(b) Toute matrice de passage entre la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et une base faite de vecteurs propres de $A$ convient. Reste donc à déterminer les vecteurs propres de $A$ :

– $E_1$ :

$$AX = X \Leftrightarrow 5AX = 5X \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{cccc} 4x & + & 2y & = & 5x \\ x & + & 3y & = & 5y \end{array} \right. \Leftrightarrow x - 2y = 0$$

D'où $\varepsilon_1 = (2,1)$

– $E_{\frac{2}{5}}$ :

$$AX = \frac{2}{5}X \Leftrightarrow 5AX = 2X \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{cccc} 4x & + & 2y & = & 2x \\ x & + & 3y & = & 2y \end{array} \right. \Leftrightarrow x + y = 0$$

D'où $\varepsilon_2 = (1,-1)$.

La matrice $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ convient et $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$.

(c) Soit $\mathcal{P}(n)$ : $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{2}{5}\right)^n \end{pmatrix}$.

– *Initialisation* : par hypothèse, $D^0 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{2}{5}\right)^0 \end{pmatrix}$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

– *Hérédité* : supposons qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{2}{5}\right)^n \end{pmatrix}$. Alors

$$D^{n+1} = D \times D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{2}{5}\right)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{2}{5}\right) . \left(\frac{2}{5}\right)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1} \end{pmatrix}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie et par récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soit maintenant $\mathcal{Q}(n)$ : $A^n = P \times D^n \times P^{-1}$.

– Par hypothèse, on a $A^0 = I_2 = P \times I_2 \times P^{-1} = P \times D^0 \times P^{-1}$ donc $\mathcal{Q}(0)$ est vraie.

– Supposons qu'il existe en entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $A^n = P \times D^n \times P$. D'après les questions précédentes, on a

$$D = P^{-1}AP \;\Rightarrow\; A = PDP^{-1}$$

Mais alors

$$A^{n+1} = A \times A^n = PDP^{-1} \times PD^nP^{-1} = P \times D \times D^n \times P^{-1} = P \times D^{n+1} \times P^{-1}$$

donc $\mathcal{Q}(n+1)$ est vraie.

Par récurrence, $\mathcal{Q}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(d) D'après la formule rappelée dans l'énoncé, on trouve

$$P^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} A^n = P \times D^n \times P^{-1} &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{2}{5}\right)^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{2^n}{5^n} & -\frac{2^{n+1}}{5^n} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D'où

$$A^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 + \dfrac{2^n}{5^n} & 2 - \dfrac{2^{n+1}}{5^n} \\ \\ 1 - \dfrac{2^n}{5^n} & 1 + \dfrac{2^{n+1}}{5^n} \end{pmatrix}$$

2. (a) D'après l'énoncé, si $x_n$ et $y_n$ donnent la répartition au $n$-ième jour et $x_{n+1}$ et $y_{n+1}$ donnent la répartition au $(n+1)$-ième jour, on a

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} x_{n+1} & = & \dfrac{4}{5}x_n & + & \dfrac{2}{5}y_n \\ \\ y_{n+1} & = & \dfrac{1}{5}x_n & + & \dfrac{3}{5}y_n \end{array} \right. \Leftrightarrow X_{n+1} = A \times X_n$$

(b) Par récurrence.

(c) D'après les calculs effectués à la question 1, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \left\{ \begin{array}{rcrcr} x_n & = & \left(2 + \left(\dfrac{2}{5}\right)^n\right) x_0 & + & \left(2 - 2\left(\dfrac{2}{5}\right)^n\right) y_0 \\ y_n & = & \left(1 - \left(\dfrac{2}{5}\right)^n\right) x_0 & + & \left(1 + 2\left(\dfrac{2}{5}\right)^n\right) y_0 \end{array} \right.$$

(d) Pour avoir la répartition dans le réservoir au bout d'un temps infini, il suffit de passer à la limite $n \to +\infty$ dans le système précédent. Or dans chacune des expressions précédentes, on reconnaît le terme $\left(\frac{2}{5}\right)^n$ qui est le terme général d'une suite géométrique de raison $\frac{2}{5} < 1$. Ainsi, tous ces termes tendent vers 0 et en note $x_\infty$ et $y_\infty$ les limites $\lim x_n$ et $\lim y_n$, on a

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} x_\infty & = & 2x_0 & + & 2y_0 \\ y_\infty & = & x_0 & + & y_0 \end{array} \right.$$

Autrement dit, au bout d'un temps infini, le premier compartiment contient deux tiers de l'eau stockée dans le réservoir et le second compartiment contient le dernier tiers.

⋆ ⋆
⋆