CONTRÔLE CONTINU

Algèbre linéaire

Durée : 1h30 *Les calculatrices sont autorisées.*

Tous les exercices sont indépendants.
Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation.

Exercice 1 1. Dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ des matrices carrées 3×3, on note $\mathcal{T}_3(\mathbb{R})$ le sous ensemble des matrices triangulaires inférieures.

(a) Donner la forme générale d'une matrice M de $\mathcal{T}_3(\mathbb{R})$.

(b) Montrer que $\mathcal{T}_3(\mathbb{R})$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

(c) Conjecturer la dimension de $\mathcal{T}_3(\mathbb{R})$ (on justifiera rapidement).

2. On note E l'ensemble des suites numériques sur lequel on définit les deux opérations suivantes :

– *l'addition (lci)* :

$$\forall (u_n), (v_n) \in E, \qquad (u_n) + (v_n) = (u_n + v_n)$$

– *la multiplication extérieure* :

$$\forall (u_n) \in E, \;\; \forall \lambda \in \mathbb{R}, \qquad \lambda.(u_n) = (\lambda u_n)$$

On admet que ces deux opérations font de E un espace vectoriel.

(a) Montrer que la suite (z_n) définie par $z_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est le vecteur nul de E.

(b) Montrer que si q est un réel fixé, l'ensemble des suites géométriques de raison q est un sous espace vectoriel de E.

(c) L'ensemble des suites arithmétiques de raison r non nulle fixée est-il un sous espace vectoriel de E ? (justifier)

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 On se place dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un point d'origine O. On fixe une base orthonormée $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\}$ de $\mathcal{P}$ et on note f l'application linéaire du plan dans lui-même dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est

$$A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

1. Placer dans le repère ci-joint les vecteurs suivants

$$\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}, \;\; \overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}, \;\; \overrightarrow{v_3} = 2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}, \;\; \overrightarrow{v_4} = \overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j}$$

2. Calculer les images $f(\overrightarrow{v_1})$, $f(\overrightarrow{v_2})$, $f(\overrightarrow{v_3})$ et $f(\overrightarrow{v_4})$ à l'aide de la matrice A et les placer dans le repère.
3. Montrer que $\text{Spec}(f) = \{-1, 1\}$.
4. Déterminer les sous espaces propres de f (on précisera la dimension de chacun et on en donnera une base) et les tracer dans le repère.
5. Construire une base orthonormée $\mathcal{B}'$ de $\mathcal{P}$ faite de vecteurs propres de f et donner la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
6. Donner sans calcul la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.
7. Comment qualifier la transformation du plan $\mathcal{P}$ effectuée par l'application f ?

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

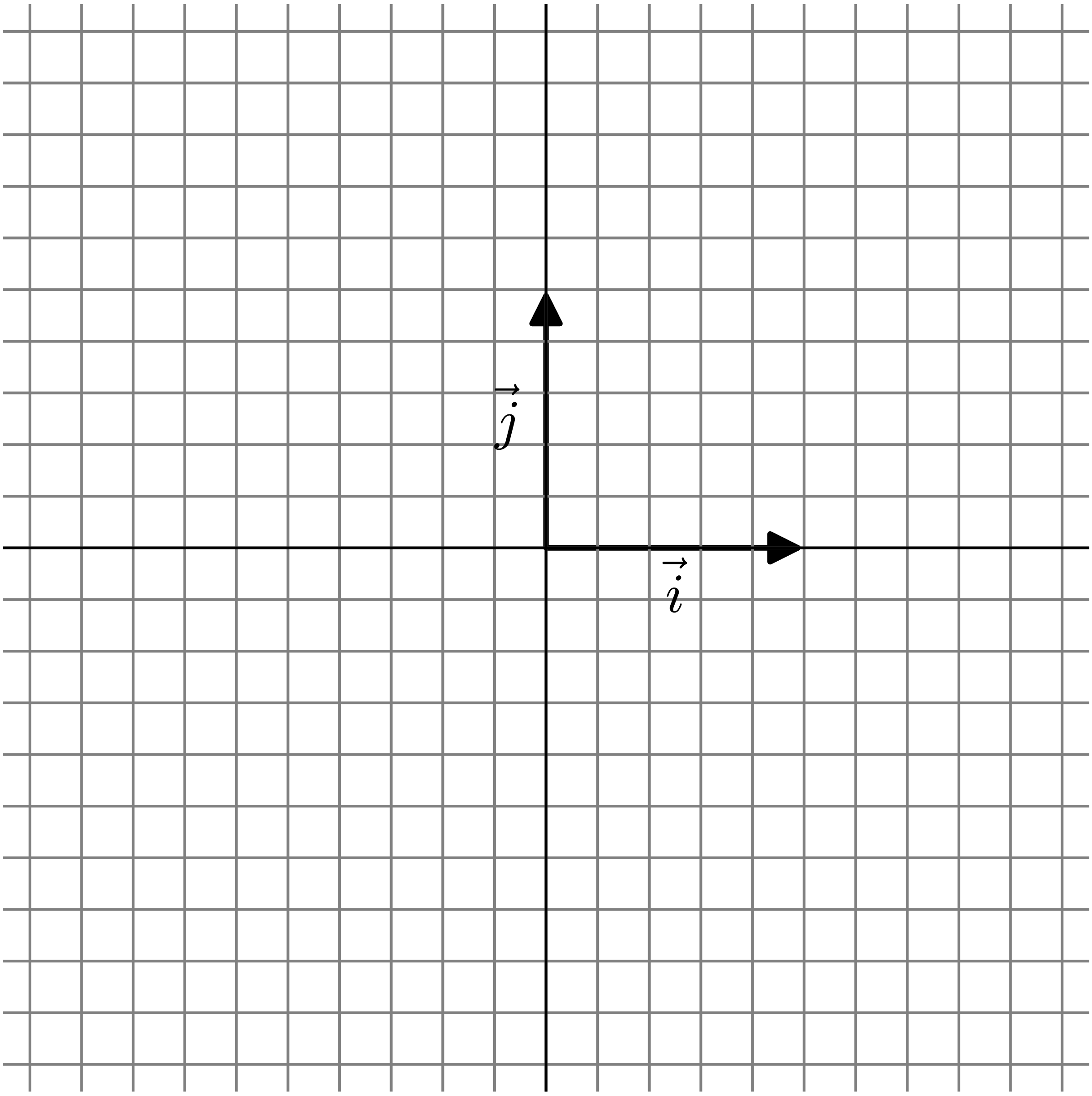
Exercice 3 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}_c$ et l'on note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}_c$ est

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de f et en déduire son spectre.
2. On suppose ici que $\alpha \neq -1$.
   (a) Déterminer les sous espaces propres de f.
   (b) Déterminer une matrice P telle que le produit $P^{-1} \times M \times P$ soit une matrice diagonale D que l'on précisera.
3. On suppose maintenant que $\alpha = -1$. Montrer que f n'est pas diagonalisable.

⋆ ⋆
⋆

Nom : .... Prénom : ....



CORRECTION

Exercice 1 :

1. (a) Une matrice triangulaire inférieure de taille 3×3 est de la forme

$$M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

(b) Soient

$$M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad M' = \begin{pmatrix} a' & 0 & 0 \\ b' & c' & 0 \\ d' & e' & f' \end{pmatrix}$$

deux matrices triangulaires inférieures. Par définition des opérations "+" et "." de l'espace des matrices, on a

– La matrice nulle est de la forme voulue puisque tous les coefficients situés au dessus de sa diagonale sont nuls.

– $M + M' = \begin{pmatrix} a+a' & 0 & 0 \\ b+b' & c+c' & 0 \\ d+d' & e+e' & f+f' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ B & C & 0 \\ D & E & F \end{pmatrix}$ est bien une matrice triangulaire inférieure.

– Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda.M = \begin{pmatrix} \lambda a & 0 & 0 \\ \lambda b & \lambda c & 0 \\ \lambda d & \lambda e & \lambda f \end{pmatrix}$ et l'on reconnaît encore une matrice triangulaire inférieure.

L'ensemble $\mathcal{T}_3(\mathbb{R})$ est donc un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. D'autre part, on doit fixer 6 coefficients pour définir une matrice de $\mathcal{T}_3(\mathbb{R})$. La dimension de ce sous espaces est donc 6.

2. (a) Soit (z_n) la suite nulle : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad z_n = 0$. Par définition de l'opération "+", on a, pour toute suite (u_n) :

$$(u_n) + (z_n) = (u_n + z_n) = (u_n + 0) = (u_n)$$

La suite (z_n) est donc bien l'élément neutre pour l'addition des suites.

(b) Une suite géométrique de raison q est une suite (u_n) vérifiant une relation de la forme

$$u_{n+1} = q.u_n$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or

– La suite nulle (z_n) vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad z_{n+1} = 0 = q.0 = q.z_n$$

Elle fait donc partie de l'ensemble des suites géométriques de raison q.

– Si (u_n) et (v_n) sont deux suite géométriques de raison q, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = q.u_n \qquad \text{et} \qquad v_{n+1} = q.v_n$$

Mais alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\lambda.(u_n) + (v_n) = (\lambda u_n + v_n)$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \lambda u_{n+1} + v_{n+1} = \lambda.q.u_n + q.v_n = q(\lambda u_n + v_n)$$

La suite $\lambda.(u_n) + (v_n)$ est donc encore une suite géométrique de raison q.

Autrement dit, l'ensemble des suites géométriques de raison q contient le vecteur nul et est stable par combinaisons linéaires. C'est donc un sous espace vectoriel de l'ensemble des suites.

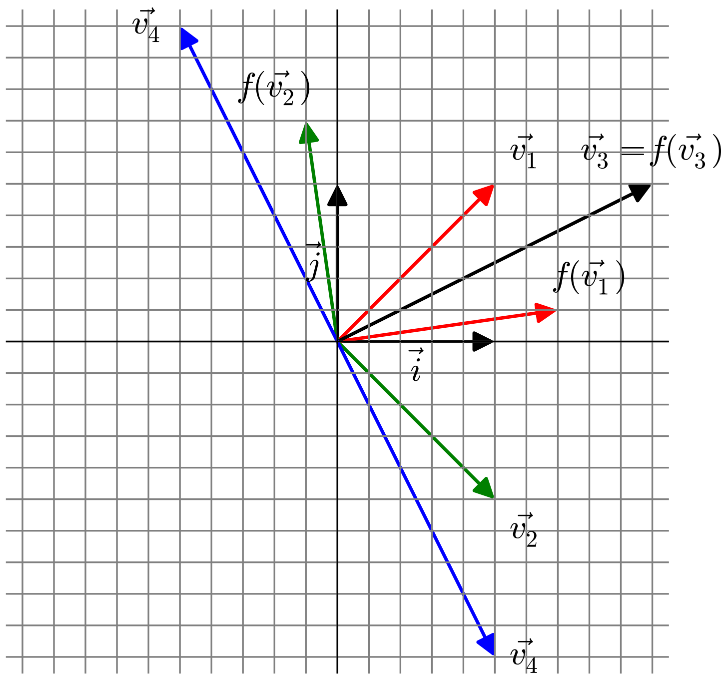
(c) La suite nulle z_n n'est pas une suite arithmétique de raison $r \neq 0$. L'ensemble des suites arithmétiques de raison $r \neq 0$ n'est donc pas un SEV de l'ensemble des suites.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 :

1. c.f. plus bas
2. Pour déterminer les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ des images demandées, il faut multiplier par la matrice A les vecteurs coordonnées de chacun des vecteurs $\overrightarrow{v_i}$. Ainsi :

$$\begin{array}{lcll}
\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} & \Rightarrow & f(\overrightarrow{v_1}) = & \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} & \Rightarrow & f(\overrightarrow{v_2}) = & \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix} \\
\overrightarrow{v_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} & \Rightarrow & f(\overrightarrow{v_3}) = & \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{v_3} \\
\overrightarrow{v_4} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} & \Rightarrow & f(\overrightarrow{v_4}) = & \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = -\overrightarrow{v_4}
\end{array}$$



3. Pour obtenir le spectre de f, on calcule son polynôme caractéristique :

$$\begin{aligned}
\chi_f(\lambda) &= \det(A - \lambda \mathrm{I}_2) \\
&= \begin{vmatrix} \frac{3}{5} - \lambda & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} - \lambda \end{vmatrix} \\
&= \left(\frac{3}{5} - \lambda\right)\left(-\frac{3}{5} - \lambda\right) - \left(\frac{4}{5}\right)^2 \\
&= \lambda^2 - \frac{9}{25} - \frac{16}{25} \\
&= \lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)
\end{aligned}$$

D'où $\mathrm{Spec}(f) = \{\pm 1\}$.

4. – $\underline{E_1}$

$$\begin{aligned}
AX = X &\iff \left\{\begin{array}{ccccc} \frac{3}{5}x & + & \frac{4}{5}y & = & x \\ \\ \frac{4}{5}x & - & \frac{3}{5}y & = & y \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{ccccc} 3x & + & 4y & = & 5x \\ 4x & - & 3y & = & 5y \end{array}\right. \\
&\iff y = \frac{1}{2}x
\end{aligned}$$

E_1 est donc la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x$ (dimension 1) dont un vecteur propre est le vecteur $\overrightarrow{v_3}$ ci-dessus.

– $\underline{E_{-1}}$

$$\begin{aligned}
AX = -X &\iff \left\{\begin{array}{ccccc} \frac{3}{5}x & + & \frac{4}{5}y & = & -x \\ \\ \frac{4}{5}x & - & \frac{3}{5}y & = & -y \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{ccccc} 3x & + & 4y & = & -5x \\ 4x & - & 3y & = & -5y \end{array}\right. \\
&\iff y = -2x
\end{aligned}$$

E_{-1} est donc la droite d'équation $y = -2x$ (dimension 1) dont un vecteur propre est le vecteur $\overrightarrow{v_4}$ ci-dessus.

Note : en étudiant de près les images $f(\overrightarrow{v_3})$ et $f(\overrightarrow{v_4})$, on aurait peut s'épargner les calculs des deux questions précédentes, ces deux vecteurs étant respectivement deux vecteurs propres associés aux valeurs propres 1 et -1.

5. Les deux sous espaces propres étant orthogonaux, une BON du plan faite de vecteur propre de f s'obtient en normant les vecteurs $\overrightarrow{v_3}$ et $\overrightarrow{v_4}$. Ainsi,

$$\overrightarrow{\varepsilon_1} = \frac{\overrightarrow{v_3}}{||\overrightarrow{v_3}||} = \frac{\sqrt{5}}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\varepsilon_2} = \frac{\overrightarrow{v_4}}{||\overrightarrow{v_4}||} = \frac{\sqrt{5}}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

La famille $\mathcal{B}' = \{\overrightarrow{\varepsilon_1}, \overrightarrow{\varepsilon_2}\}$ rempli les critères voulus et la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est

$$P = \frac{\sqrt{5}}{5}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

6. La matrice de f dans $\mathcal{B}'$ est
$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

7. La matrice D est caractéristique d'une symétrie : pour chaque vecteur du plan, la fonction f conserve la composante en $\overrightarrow{\varepsilon_1}$ et multiplie par -1 la composante en $\overrightarrow{\varepsilon_2}$. Les vecteurs $\overrightarrow{\varepsilon_1}$ et $\overrightarrow{\varepsilon_2}$ étant orthogonaux, il s'agit ici de la symétrie orthogonale d'axe E_1.

$\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star$

Exercice 3 :

1. Le polynôme caractéristique de f est
$$\begin{aligned}\chi_f(\lambda) = \det(M - \lambda \mathrm{I}_3) &= \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \alpha - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (-1-\lambda)^2(\alpha - \lambda)\end{aligned}$$
D'où $\mathrm{Spec}(f) = \{-1, \alpha\}$, -1 étant d'ordre 2 et α d'ordre 1.

2. $\alpha \neq -1$.
   (a) f admet deux sous espaces propres :
   - <u>E_{-1}</u>
   $$\begin{aligned} MX = -X &\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x & & & + & z & = & -x \\ & - & y & & & = & -y \\ & & & & \alpha z & = & -z \end{array}\right. \\ &\iff z = 0 \end{aligned}$$
   D'où $E_{-1}\{(x, y, 0),\ x, y \in \mathbb{R}\}$. C'est un sous espace de dimension 2 de $\mathbb{R}^3$, engendré par exemple par les vecteurs $e_1 = (1, 0, 0)$ et $e_2 = (0, 1, 0)$.
   - <u>E_α</u>
   $$\begin{aligned} MX = \alpha X &\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x & & & + & z & = & \alpha x \\ & - & y & & & = & \alpha y \\ & & & & \alpha z & = & \alpha z \end{array}\right. \\ &\iff \left\{\begin{array}{rcl} y & = & 0 \\ z & = & (\alpha+1)x \end{array}\right. \end{aligned}$$
   D'où $E_\alpha\{(x, 0, (\alpha+1)x),\ x \in \mathbb{R}\}$. C'est un sous espace de dimension 1 de $\mathbb{R}^3$, engendré par exemple par le vecteur $e_3 = (1, 0, \alpha + 1)$.

   (b) La famille $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ est libre (car e_1 et e_2 ne sont pas colinéaires et e_3 appartient à un sous espace propre différent de f). Elle forme donc une base de $\mathbb{R}^3$ faite de vecteurs propres de f. Dans cette base, la matrice de f est la matrice diagonale
   $$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

La matrice P vérifiant la relation $D = P^{-1}MP$ est la matrice de passage de $\mathcal{B}_c$ à $\mathcal{B}'$, soit

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha+1 \end{pmatrix}$$

3. Si $\alpha = -1$, f admet -1 comme unique valeur propre d'ordre 3. Mais alors, le sous espace propre E_{-1} est donné par les solutions du système ci-dessous :

$$MX = -X \iff \left\{ \begin{array}{ccccccc} -x & & & + & z & = & -x \\ & - & y & & & = & -y \\ & & & & -z & = & -z \end{array} \right.$$
$$\iff z = 0$$

C'est donc un sous espace dont la dimension (2) est strictement inférieure à l'ordre de la valeur propre. L'endomorphisme f n'est donc pas diagonalisable.

⋆ ⋆
⋆