CONTRÔLE CONTINU

Algèbre linéaire

Durée : 1h30. *Les calculatrices sont autorisées.*

Tous les exercices sont indépendants.
Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation.

Exercice 1 Soit E un espace vectoriel.

1. Soit $\mathcal{F} = \{\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n}\}$ une famille de vecteurs de E.
   (a) Recopier et compléter la définition suivante :
   $$\text{Vect}(\mathcal{F}) \;=\; \{\overrightarrow{v} = \text{.......}, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}\}$$
   (b) Montrer que $\text{Vect}(\mathcal{F})$ est un sous espace vectoriel de E.
   (c) Rappeler la définition du rang d'une famille de vecteurs.

2. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on note $\mathcal{F}_\alpha$ la famille de $\mathbb{R}^3$ définie par
   $$\mathcal{F}_\alpha = \{(\alpha, 1, 1), (1, \alpha, 1), (1, 1, \alpha)\}$$
   (a) Donner la matrice M_α de $\mathcal{F}_\alpha$ dans la base canonique $\mathcal{B}_c$ de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Montrer que si $\alpha \notin \{-2, 1\}$, la famille $\mathcal{F}_\alpha$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (c) Montrer sans calcul que $\mathcal{F}_{-2}$ est de rang 2.
   (d) Donner sans calcul le rang de la famille $\mathcal{F}_1$.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 On se place dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormée $\mathcal{R} = (\mathcal{O}\,; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Pour $a, b \in \mathbb{R}$ non nuls fixés, on note f l'endomorphisme de $\mathcal{P}$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\}$ est
$$A = \text{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

1. *Une étude générale*
   (a) Montrer que $\text{Spec}(f) = \{a + b, a - b\}$.

(b) Montrer que les sous espaces propres de f sont deux droites indépendantes de a et b et les placer dans le repère ci-joint.

(c) Donner une matrice diagonale D et une matrice de passage P telles que $D = P^{-1}AP$.

2. *Un exemple*

On pose maintenant $a = 1$ et $b = \frac{1}{2}$ et l'on considère les quatre points du plan

$$P_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}, \quad P_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}, \quad P_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}, \quad P_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$$

(a) Placer les points P_1 à P_4 dans le repère ci-joint.

(b) Déterminer les coordonnées dans $\mathcal{R}$ des points $f(P_i)$ pour $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ et les placer dans le repère.

(c) Tracer une esquisse de l'image du cercle unité par l'endomorphisme f et commenter.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

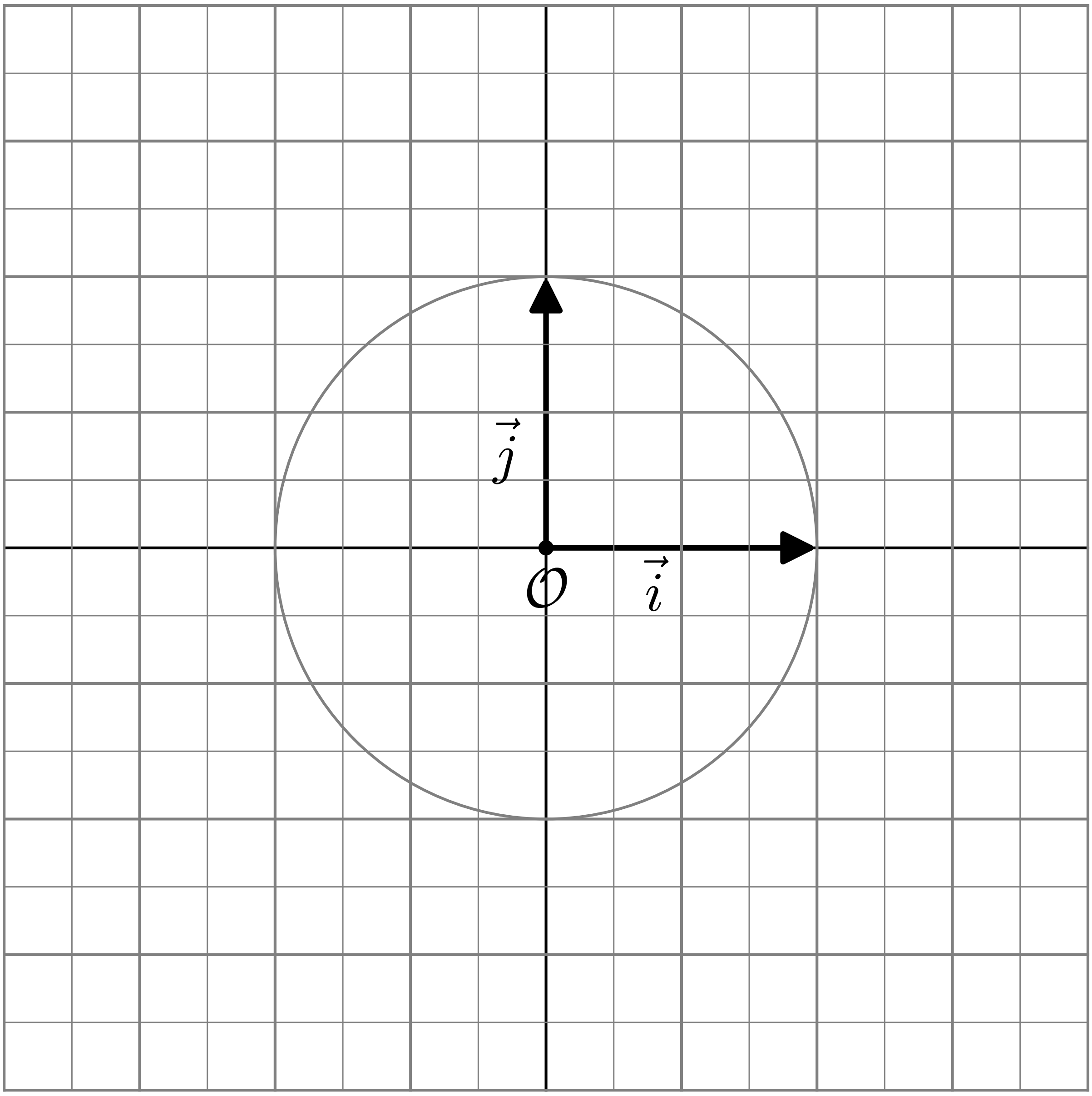
Exercice 3 Dans $\mathbb{R}^3$, on note f l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}_c$ de $\mathbb{R}^3$ est

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $\mathrm{Spec}(f) = \{0, 1\}$.
2. Déterminer les sous espaces propres E_0 et E_1. On précisera la dimension ainsi qu'une base de chacun de ces sous espaces propres.
3. Montrer que la famille formée des deux bases obtenues à la question précédente est une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$.
4. Donner sans calcul la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.
5. En assimilant $\mathbb{R}^3$ à l'espace muni d'un repère, comment qualifieriez-vous la transformation de l'espace modélisée par f ?

⋆ ⋆
⋆

Nom : .... Prénom : ....



CORRECTION

Exercice 1 :

1. (a)

$$\text{Vect}(\mathcal{F}) = \left\{ \overrightarrow{v} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.\overrightarrow{e_i},\ \lambda_i \in \mathbb{R} \right\}$$

(b) N'importe que n-uplet $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ (par exemple $(0, \ldots, 0)$) permet de construire un élément de $\text{Vect}(\mathcal{F})$ (par exemple $\overrightarrow{0_E}$). Donc $\text{Vect}(\mathcal{F})$ est non vide.

D'autre part, soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de $\text{Vect}(\mathcal{F})$. Il existe des coefficients $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ et $(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ tels que

$$u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.\overrightarrow{e_i} \qquad \text{et} \qquad v = \sum_{i=1}^{n} \mu_i.\overrightarrow{e_i}$$

Mais alors

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.\overrightarrow{e_i} + \sum_{i=1}^{n} \mu_i.\overrightarrow{e_i} = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i + \mu_i)\overrightarrow{e_i} \in \text{Vect}(\mathcal{F})$$

De même, pour tout $k \in \mathbb{R}$, on a

$$k.\overrightarrow{u} = k.\sum_{i=1}^{n} \lambda_i.\overrightarrow{e_i} = \sum_{i=1}^{n} (k \times \lambda_i).\overrightarrow{e_i} \in \text{Vect}(\mathcal{F})$$

Donc $\text{Vect}(\mathcal{F})$ est stable par addition et par multiplication extérieure.
$\text{Vect}(\mathcal{F})$ est donc non vide et stable par combinaisons linéaires. C'est donc un sous espace vectoriel de E.

(c) Le rang de $\mathcal{F}$ est la dimension de l'espace vectoriel $\text{Vect}(\mathcal{F})$.

2. (a)

$$M_\alpha = \text{mat}_{\mathcal{B}_c}(\mathcal{F}_\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

(b) La famille $\mathcal{F}_\alpha$ comptant trois éléments, c'est une base de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si elle est libre, i.e. si le déterminant de M_α est non nul. Or

$$\begin{aligned}
\det(M_\alpha) = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix} &= \alpha \begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & 1 \end{vmatrix} \\
&= \alpha(\alpha^2 - 1) - (\alpha - 1) + (1 - \alpha) \\
&= \alpha(\alpha + 1)(\alpha - 1) - 2(\alpha - 1) \\
&= (\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha - 2) \\
&= (\alpha - 1)^2(\alpha + 2)
\end{aligned}$$

Ainsi, la famille $\mathcal{F}_\alpha$ est une base de $\mathbb{R}^3$ pour tout $\alpha \notin \{-2, 1\}$.

(c) $\mathcal{F}_{-2} = \{(-2,1,1),(1,-2,1),(1,1,-2)\}$. D'après le calcul ci dessus, la famille $\mathcal{F}_{-2}$ est liée. Donc $\text{rg}(\mathcal{F}_{-2}) < 3$. Or $\mathcal{F}_{-2}$ contient au moins deux vecteurs non colinéaires (ils sont même deux à deux non colinéaires). Donc $\text{rg}(\mathcal{F}_{-2}) \geqslant 2$. Ainsi, $\text{rg}(\mathcal{F}_{-2}) = 2$.

(d) $\mathcal{F}_1 = \{(1,1,1),(1,1,1),(1,1,1)\} = \{(1,1,1)\}$. Autrement dit, $\mathcal{F}_1$ ne contient qu'un vecteur, et celui ci est non nul. Donc $\text{rg}(\mathcal{F}_1) = 1$.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 :

1. (a)

$$\begin{aligned}\chi_f(\lambda) = \det(A - \lambda.I) &= \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & a-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (a-\lambda)^2 - b^2 = (a-\lambda-b)(a-\lambda+b) = (\lambda-(a-b))(\lambda-(a+b))\end{aligned}$$

Donc $\text{Spec}(f) = \{a+b, a-b\}$.

(b) • $\underline{E_{a+b}}$:

$$\begin{aligned} AX = (a+b)X &\iff \left\{\begin{array}{rcl} ax+by &=& (a+b)x \\ bx+ay &=& (a+b)y \end{array}\right. \\ &\iff \left\{\begin{array}{rcl} by &=& bx \\ bx &=& by \end{array}\right. \\ &\iff y = x \end{aligned}$$

• $\underline{E_{a-b}}$:

$$\begin{aligned} AX = (a-b)X &\iff \left\{\begin{array}{rcl} ax+by &=& (a-b)x \\ bx+ay &=& (a-b)y \end{array}\right. \\ &\iff \left\{\begin{array}{rcl} by &=& -bx \\ bx &=& -by \end{array}\right. \\ &\iff y = -x \end{aligned}$$

Les sous-espaces propres sont donc respectivement la première et la seconde bissectrice du plan.

(c) Les vecteurs non nuls de E_{a+b} et E_{a-b} sont les vecteurs propres de f. En posant

$$\overrightarrow{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} \in E_{a+b} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{e_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} \in E_{a-b}$$

on obtient une base $\mathcal{B}'$ du plan faite de vecteur propres de f. On a alors

$$\text{mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & a-b \end{pmatrix} = D$$

et en posant

$$P = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

on a

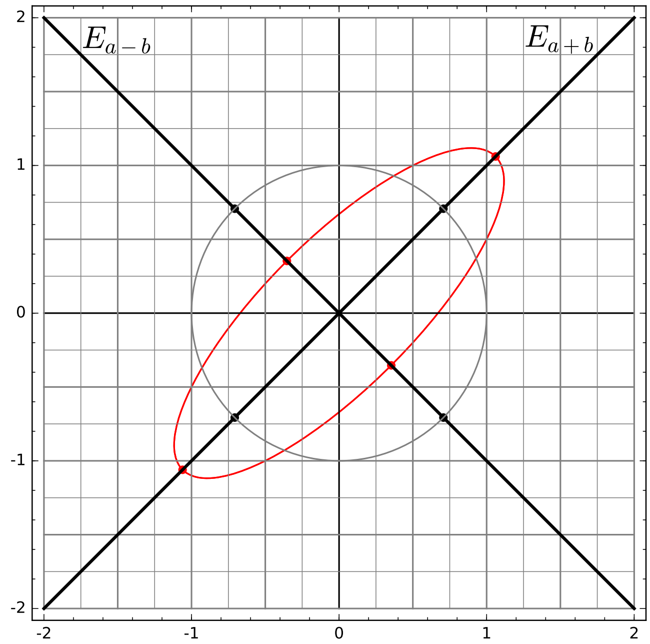
$$P^{-1} \times A \times P = P^{-1} \times \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f) \times P = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}'}(f) = D$$

2. (a) c.f. plus bas

   (b) On peut obtenir les coordonnées des vecteurs $f(P_i)$ dans $\mathcal{R}$ via la matrice A. Cependant, tous ces points correspondent à des vecteurs propres de f, les points P_1 et P_3 sont sur $E_{a+b} = E_{\frac{3}{2}}$ et les pointe P_2 et P_4 sur $E_{a-b} = E_{\frac{1}{2}}$. Ainsi,

$$\begin{array}{rclcrcl} f(P_1) & = & \frac{3}{2}.P_1 = \frac{3\sqrt{2}}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, & & f(P_2) & = & \frac{1}{2}.P_2 = \frac{\sqrt{2}}{4}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ f(P_3) & = & \frac{3\sqrt{2}}{4}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, & & f(P_4) & = & \frac{\sqrt{2}}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

   (c)



On constate que le cercle est “dilaté” dans la direction de E_{a+b} et “contracté” dans la direction E_{a-b}. D'autre part, l'intensité de ces déformation est liée à la valeurs des valeurs propres $a+b$ et $a-b$.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 :

1. Le polynôme caractéristique de f est

$$\begin{aligned}
\chi_f(\lambda) &= \det(A-\lambda I) \\
&= \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 1 \\ {}^{+}0 & {}^{-}1-\lambda & {}^{+}0 \\ -2 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (1-\lambda)\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (1-\lambda)[(-1-\lambda)(2-\lambda)+2] \\
&= (1-\lambda)(-\lambda+\lambda^2) \\
&= -\lambda(\lambda-1)^2
\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Spec}(f) = \{0,1\}$, 0 étant d'ordre 1 et 1 d'ordre 2.

2. • $\underline{E_0}$:

$$AX = 0 \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x & + & y & + & z & = & 0 \\ & & y & & & = & 0 \\ -2x & + & y & + & 2z & = & 0 \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} z & = & x \\ y & = & 0 \end{array}\right.$$

Donc

$$E_0 = \{(x,0,x),\ x\in\mathbb{R}\}$$

C'est une droite (sa dimension est 1), engendrée par le vecteur $\overrightarrow{v_1} = (1,0,1)$.

• $\underline{E_1}$:

$$AX = X \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x & + & y & + & z & = & x \\ & & y & & & = & y \\ -2x & + & y & + & 2z & = & z \end{array}\right.$$
$$\iff -2x+y+z=0$$
$$\iff z = 2x-y$$

Donc

$$E_1 = \{(x,y,2x-y),\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\}$$

Il s'agit d'un sous espace de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2, engendré par exemple par les vecteurs

$$\overrightarrow{v_2} = (1,0,2) \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{v_3} = (0,1,-1)$$

3. La famille $\mathcal{B}' = \{\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_3}\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si elle est libre. Or

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_c}(\mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

dont le déterminant est $-1 \neq 0$. La famille $\mathcal{B}'$ est donc libre. Étant de rang 3, elle engendre $\mathbb{R}^3$.

4. La famille $\mathcal{B}'$ étant faite de vecteurs propres de f, on a

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Si la famille $\mathcal{B}'$ étant une base de l'espace, chaque vecteur de l'espace possède une composante selon E_0 (colinéaire à $\overrightarrow{v_1}$) et une composante selon E_1 (qui s'exprime en fonction de $\overrightarrow{v_2}$ et $\overrightarrow{v_3}$). Or la fonction f annule la composante selon E_0 et conserve celle selon E_1. Il s'agit donc de la projection sur le plan E_1, parallèlement à la droite E_0.

⋆ ⋆
⋆