CONTRÔLE CONTINU

Algèbre linéaire

Durée : 1h30. *Les calculatrices sont autorisées.*

Tous les exercices sont indépendants.
Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation.

Exercice 1 On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices 3×3 à coefficients réels.

1. On note S le sous ensemble de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ défini de la façon suivante :

$$S = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix},\ a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

   (a) Montrer que S est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

   (b) Soit $\mathcal{F} = \{A_1, A_2, A_3\}$ la famille définie par

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

      i. Montrer que $\mathcal{F}$ est une famille libre.

      ii. Montrer que toute matrice de S est une combinaison linéaire des matrices de $\mathcal{F}$.

      iii. En déduire la nature et $\mathcal{F}$ ainsi que la dimension de S.

2. On note T le sous ensemble de S défini par

$$T = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

   et l'on note M une matrice quelconque de T

   (a) L'ensemble T est-il un espace vectoriel ? Justifier

   (b) Déterminer les coordonnées de M dans la base $\mathcal{F}$.

   (c) Montrer que a et b sont les valeurs propres de M.

   (d) Montrer que si $a = b$, la matrice M n'est pas diagonalisable.

   (e) On suppose à partir de maintenant que que $a \neq b$.

      i. Déterminer les sous-espaces propres de M.

      ii. M est-elle diagonalisable dans ce cas ? Justifier.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 On se place dans l'espace vectoriel $\mathcal{V}$ des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et on note $\mathcal{F}$ la famille suivante :

$$\mathcal{F} = \{f_0 : x \mapsto 1,\ f_1 : x \mapsto x,\ f_3 : x \mapsto x^2\}.$$

1. Montrer que la famille $\mathcal{F}$ est une famille libre.
2. On note $\mathcal{P}$ le sous espace de $\mathcal{V}$ engendré par $\mathcal{F}$.
   (a) Quelle est la dimension de $\mathcal{P}$?
   (b) Écrire sous forme de fonction un vecteur de $\mathcal{P}$ de coordonnées $f = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_{\mathcal{F}}$.
   (c) Sous quel nom connaît-on mieux le SEV $\mathcal{P}$?

⋆ ⋆
⋆

CORRECTION

Exercice 1 :

1. (a) i. La matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est bien de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ avec $a = b = c = 0$.

   Donc $0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} \in S$.

   ii. Soient
$$M = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad M' = \begin{pmatrix} a' & 0 & c' \\ 0 & b' & 0 \\ 0 & 0 & a' \end{pmatrix}$$
   deux matrices de S et $k, \ell \in \mathbb{R}$. On a
$$k.M + \ell.M' = \begin{pmatrix} ka + \ell a' & 0 & kc + \ell c' \\ 0 & kb + \ell b' & 0 \\ 0 & 0 & ka + \ell a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 & C \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix}$$
   avec
$$A = ka + \ell a', \qquad B = kb + \ell b', \qquad C = kc + \ell c'.$$
   S contient donc le vecteur nul de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et est stable par combinaisons linéaires. C'est donc un SEV de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

   (b) i. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $a.A_1 + b.A_2 + c.A_3 = 0$. Par identification, on obtient un système de 9 équations à trois inconnues, dont l'unique solution est $a = b = c = 0$. La famille $\mathcal{F}$ est donc libre.

   ii. Soit $M = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \in S$. On a
$$M = a.A_1 + b.A_2 + c.A_3$$
   Toute matrice de S est donc une combinaison linéaire des matrices A_1, A_2 et A_3. Autrement dit, la famille $\mathcal{F}$ engendre S.

   iii. La famille S étant à la fois libre et génératrice dans S, c'est une base de S. Donc $\dim S = \mathrm{Card}(\mathcal{F}) = 3$.

2. (a) Par définition, T ne contient pas le vecteur nul. Ça ne peut donc être un SEV de S.

   (b)
$$M = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = a.A_1 + b.A_2 + 1.A_3 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{F}}.$$

   (c) Les vap de M sont les racines du polynôme $\det(M - \lambda I_3)$. Or
$$\det(M - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} a - \lambda & 0 & 1 \\ 0 & b - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & a - \lambda \end{vmatrix} = (a - \lambda)^2 (b - \lambda).$$
   Donc $\mathrm{Spec}(M) = \{a, b\}$.

(d) Si $a = b$, M admet a comme unique valeur propre. Si M est diagonalisable, il existe donc une matrice de passage P telle que

$$M = P^{-1}.\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.P = a.P^{-1}.I_3.P = a.I_3.$$

Autrement dit, M correspond à une homothétie de rapport a, dont la matrice dans n'importe quelle base est $a.I_3$. Puisque $M \neq a.I_3$, cela ne peut être une homothétie M ne peut être diagonalisable.

(e) i. Si $b \neq a$, M a pour valeurs propres $\lambda_1 = a$ (d'ordre 2) et $\lambda_2 = b$ (d'ordre 1).

– $\underline{E_a}$: soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$MX = a.X \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} ax + z & = & ax \\ by & = & ay \\ az & = & az \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} z & = & 0 \\ y & = & 0 \end{array} \right.$$

Ainsi, $E_a = \{(x, 0, 0),\ x \in \mathbb{R}\}$. C'est donc la droite engendrée par $(1, 0, 0)$.

– $\underline{E_b}$:

$$MX = b.X \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} ax + z & = & bx \\ by & = & by \\ az & = & bz \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ z & = & 0 \end{array} \right.$$

Ainsi, $E_b = \{(0, y, 0),\ y \in \mathbb{R}\}$. C'est donc la droite engendrée par $(0, 1, 0)$.

ii. D'après les calculs précédents, a est une vap d'ordre 2, mais le sous espace propre E_a est une droite (de dimension 1, donc). Puisqu'il n'y a pas correspondance entre ces deux valeurs, M ne peut être diagonalisée.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 :

1. Soient $k_0, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ tels que $k_0.f_0 + k_1.f_1 + k_2.f_2 = 0_{\mathcal{V}}$. Par définition de la fonction nulle, on doit avoir

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad k_0.f_0(x) + k_1.f_1(x) + k_2.f_2(x) = 0_{\mathbb{R}}$$

soit

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad k_0 + k_1 x + k_2 x^2 = 0$$

En prenant pour valeurs particulières $x = 0$ puis $x = 1$ et $x = -1$, on obtient le système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} k_0 & = & 0 \\ k_0 + k_1 + k_2 & = & 0 \\ k_0 - k_1 + k_2 & = & 0 \end{array} \right.$$

dont l'unique solution est $k_0 = k_1 = k_2 = 0$. La famille $\mathcal{F}$ est donc libre dans $\mathcal{V}$.

2. (a) Puisque $\mathcal{F}$ est libre, la dimension de $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ est donnée par le cardinal de $\mathcal{F}$. Donc $\dim \mathcal{P} = 3$.

(b)

$$f = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_{\mathcal{F}} \iff f = a.f_0 + b.f_1 + c.f_2.$$

Autrement dit,

$$f \,:\, x \mapsto a + bx + cx^2.$$

(c) On reconnaît un trinôme du second degré. $\mathcal{P}$ est donc l'ensemble des trinômes du second degré à coefficients réels.

⋆ ⋆
⋆