CONTRÔLE CONTINU

Algèbre linéaire

Durée : 1h30. *Les calculatrices sont autorisées.*

Tous les exercices sont indépendants.
Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation.

Exercice 1 *Rotations.*

On se place dans le plan muni d'un repère $\mathcal{R} = (\mathcal{O}\,;\ \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ orthonormé.
On appelle A, B et C les points du plan définis par

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}.$$

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on note ρ_θ la rotation de centre $\mathcal{O}$ et d'angle θ.
On admet que ρ_θ est une application linéaire du plan dans lui-même.

1. *Cas général.*
   (a) Déterminer les coordonnées dans $\mathcal{R}$ des images $\rho_\theta(\overrightarrow{i})$ et $\rho_\theta(\overrightarrow{j})$.
   (b) En déduire la matrice M_θ de ρ_θ dans $\mathcal{R}$.

2. *La rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$.*
   (a) Montrer que la matrice de $\rho_{\frac{\pi}{4}}$ dans $\mathcal{R}$ est

$$M = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{2}}{2} & -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\[2ex] \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

   (b) En déduire les coordonnées des images $\rho_{\frac{\pi}{4}}(A)$, $\rho_{\frac{\pi}{4}}(B)$ et $\rho_{\frac{\pi}{4}}(C)$ dans $\mathcal{R}$.
   (c) Tracer dans le Repère 1 ci-joint le carré $(\mathcal{O}ABC)$ et son image par $\rho_{\frac{\pi}{4}}$.
   (d) Calculer M^2, M^4 et M^8.
   (e) Commenter les résultats obtenus.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on note

$$M_a = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

1. On suppose dans cette question que $\underline{a \neq 1}$.
   (a) Déterminer, en fonction de a, les valeurs propres de M_a.
   (b) Déterminer les vecteurs propres associés à chaque valeur propre trouvée ci-dessus.
   (c) En déduire une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles que

$$D = P^{-1}.M_a.P$$

2. On suppose maintenant que $\underline{a = 1}$.
   Montrer que M_1 n'est pas diagonalisable.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 On se place dans l'espace $\mathcal{E}$ muni d'un repère $\mathcal{R} = (\mathcal{O}\,;\ \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ orthonormé et on note f l'application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ définie par

$$\forall \overrightarrow{v} = (x, y, z) \in \mathcal{E}, \quad f(x, y, z) = \frac{1}{3}(x - y - 2z, -x + y + 2z, -2x + 2y + 4z)$$

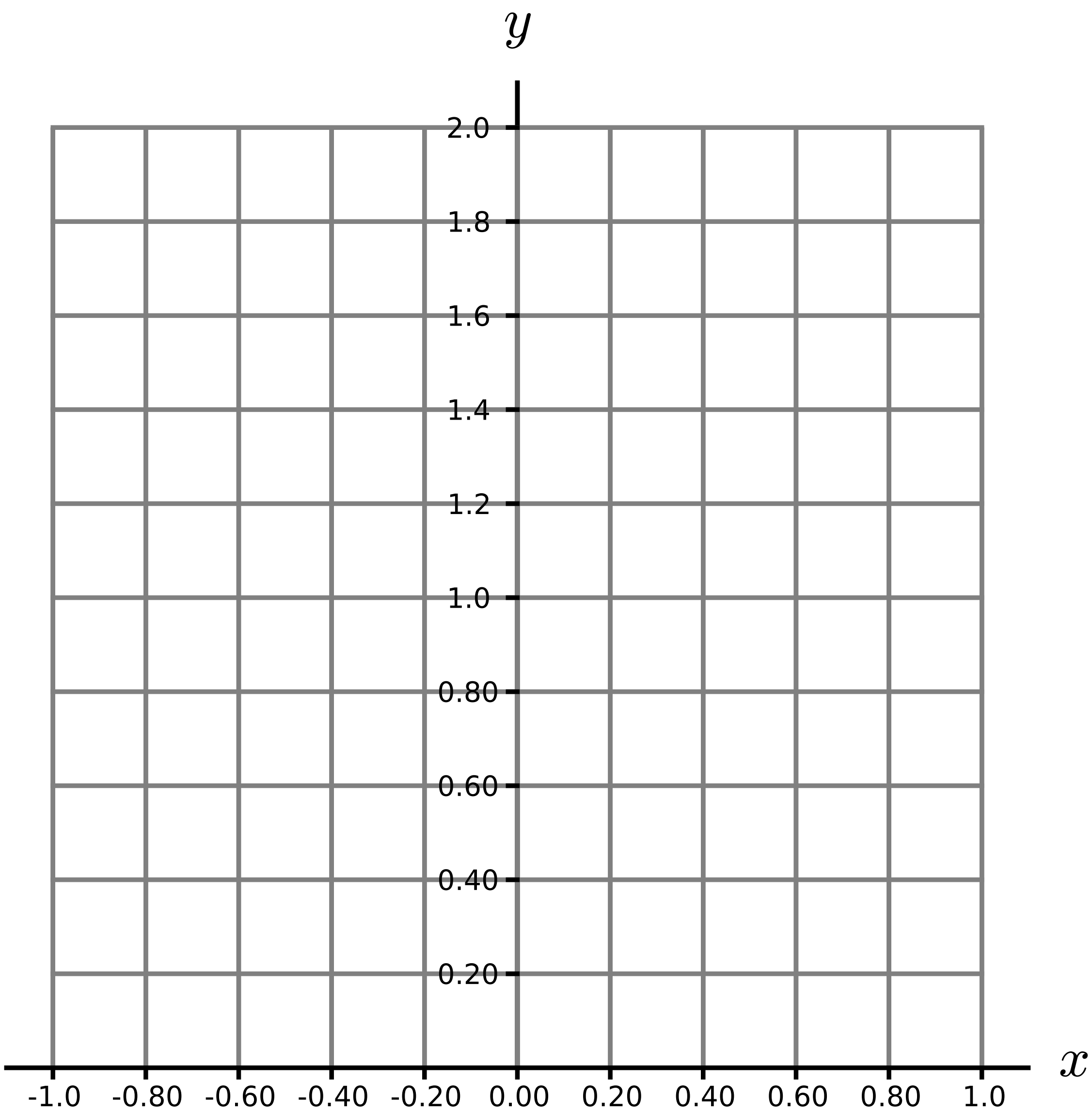
1. Montrer que f est linéaire.
2. Montrer que la matrice de f dans le repère $\mathcal{R}$ est

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

3. Montrer que le spectre de f est
$$\mathrm{Sp}(f) = \{0, 2\}.$$
4. Déterminer un repère orthonormée $\mathcal{R}'$ de l'espace dans laquelle la matrice D de f est diagonale (on explicitera la matrice D ainsi que la matrice de passage P de $\mathcal{R}$ à $\mathcal{R}'$).
5. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

⋆ ⋆
⋆

Nom : .... Prénom : ....

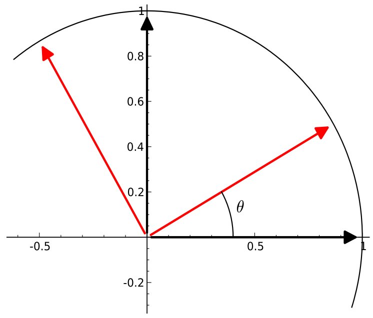


Repère 1

CORRECTION

Exercice 1 :

1.
   (a) D'après le dessin ci-contre, on lit



$$\rho_\theta(\overrightarrow{i}) = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} \quad \text{et} \quad \rho_\theta(\overrightarrow{j}) = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$$

   (b) On en déduit

$$M_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

2. (a) Puisque $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, on remplaçant θ par $\frac{\pi}{4}$ dans M_θ, on obtient la matrice M.

   (b) On a

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}.$$

   Donc

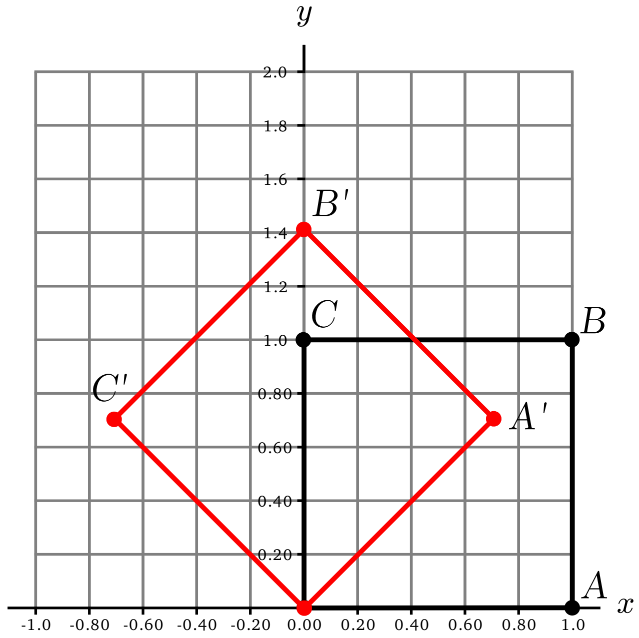
$$\rho_{\frac{\pi}{4}}(A) = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{2}}{2} & -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$$

$$\rho_{\frac{\pi}{4}}(B) = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{2}}{2} & -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$$

$$\rho_{\frac{\pi}{4}}(C) = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{2}}{2} & -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$$

   D'autre part, puisque $\rho_{\frac{\pi}{4}}$ est linéaire, on a $\rho_{\frac{\pi}{4}}(\mathcal{O}) = \mathcal{O}$

   (c) D'après les calculs précédents, on a



⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 :

1. $a \neq 1$.
   (a) Pour connaître les valeurs propres de M_a, on détermine son polynôme caractéristique :

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 0 & a-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(a-\lambda)$$

   Donc $\mathrm{Sp}(M_a) = \{1, a\}$.

   (b) On détermine les sous espaces propres :
   – E_1 :

$$M_a X = X \iff \begin{cases} x + 2y &= x \\ ay &= y \end{cases}$$
$$\iff y = 0$$

   E_1 est donc l'axe des abscisses dont un vecteur directeur est $\varepsilon_1 = (1, 0)$.

   – E_a :

$$M_a X = aX \iff \begin{cases} x + 2y &= ax \\ ay &= ay \end{cases}$$
$$\iff y = \frac{(a-1)}{2} x$$

   E_a est donc la droite dirigée (par exemple) par le vecteur $\varepsilon_a = \left(1, \frac{a-1}{2}\right)$.

(c) D'après les calculs précédents, on a

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \frac{a-1}{2} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

2. Si $a = 1$, le polynôme caractéristique de M_1 est $\chi(\lambda) = (1-\lambda)^2$.

   M_1 admet donc 1 comme unique valeur propre. Or comme plus haut, E_1 est la droite d'équation $y = 0$. Tous les vecteurs propres sont donc sur la même droite et l'on ne pourra pas construire de base du plan faite de vecteurs propres. Donc M_1 n'est pas diagonalisable.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 :

1. Pour démontrer proprement que f est linéaire, on peut comparer $f(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})$ et $f(\overrightarrow{u})+f(\overrightarrow{v})$ en notant $\overrightarrow{u} = (x,y,z)$ et $\overrightarrow{v} = (x',y',z')$, puis faire de même avec $f(\alpha\overrightarrow{u})$ et $\alpha f(\overrightarrow{u})$. Cependant, on peut gagner un peu de temps en notant que les coordonnées de $f(x,y,z)$ sont des *combinaisons linéaires* des coordonnées (x,y,z). Cela implique donc directement la linéarité de f.

2. Pour déterminer la matrice de f dans $\mathcal{R}$, on calcule $f(\overrightarrow{i})$, $f(\overrightarrow{j})$ et $f(\overrightarrow{k})$ puis on met les coordonnées obtenues en colonnes. On obtient la matrice A donnée.

3.

$$\begin{aligned}
\det(A-\lambda Id) &= \begin{vmatrix} \frac{1}{3}-\lambda & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3}-\lambda & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3}-\lambda \end{vmatrix} \\
&= \left(\frac{1}{3}-\lambda\right)\left(\left(\frac{1}{3}-\lambda\right)\left(\frac{4}{3}-\lambda\right)-\frac{4}{9}\right) \\
&\quad +\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\left(\frac{4}{3}-\lambda\right)+\frac{4}{9}\right) \\
&\quad -\frac{2}{3}\left(-\frac{2}{9}+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}-\lambda\right)\right) \\
&= \left(\frac{1}{3}-\lambda\right)\left(\lambda^2-\frac{5}{3}\lambda\right)+\frac{1}{9}\lambda+\frac{4}{9}\lambda \\
&= -\lambda^3+2\lambda^2 \\
&= \lambda^2(2-\lambda)
\end{aligned}$$

   Les valeurs propres de f sont donc 0 (d'ordre 2) et 2 (d'ordre 1).

4. On commence par déterminer E_2 car on sait que l'on va trouver une droite :
$$AX = 2X \iff \left\{\begin{array}{lcl} x-y-2z & = & 6x \\ -x+y+2z & = & 6y \\ -2x+2y+4z & = & 6z \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{ll} y=-x & (L_1+L_2) \\ z=-2x & (L_3+2L_1) \end{array}\right.$$
On trouve une droite dirigée (par exemple) par le vecteur normé $\overrightarrow{\varepsilon_1} = \frac{\sqrt{6}}{6}(1,-1,-2)$.

5. On cherche maintenant le plan E_0 :
$$AX = 0 \iff \left\{\begin{array}{lcl} x-y-2z & = & 0 \\ -x+y+2z & = & 0 \\ -2x+2y+4z & = & 0 \end{array}\right.$$
$$\iff x-y-2z=0 \qquad \left(L_2 = -L_1 = \frac{1}{2}L_3\right)$$
On peut alors en tirer un premier vecteur normé $\varepsilon_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1,1,0)$.

Pour le troisième vecteur du nouveau repère, on peut prendre
$$\varepsilon_3 = \varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}(1,-1,1)$$
D'où
$$P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6. Puisque $A = PDP^{-1}$, on a $A^n = PD^nP^{-1}$. Or $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. De plus, puisque la base que l'on a construite est orthonormale, on a $P^{-1} = {}^tP$. Donc
$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$$
$$= \frac{2^n}{6}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix} = 2^{n-1}A$$