CONTRÔLE CONTINU

Algèbre linéaire.

Durée : 1h30 *Les calculatrices sont autorisées.*

Tous les exercices sont indépendants.
Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation.

Exercice 1 Soit E un espace vectoriel.

1. Soient F et G deux sous espaces vectoriels de E. On appelle somme $F+G$ le sous ensemble de E défini par
$$F+G=\{\overrightarrow{v}=\overrightarrow{v_F}+\overrightarrow{v_G},\quad \overrightarrow{v_F}\in F,\quad \overrightarrow{v_G}\in G\}$$
   (a) Montrer que $F\subset F+G$ et $G\subset F+G$.
   (b) Montrer que $F+G$ est un sous espace vectoriel de E.

2. Soient E un espace vectoriel et f un endomorphisme de E.
   (a) Donner les définitions de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.
   (b) Montrer que $\mathrm{Im}(f)$ est un sous espace vectoriel de E.
   (c) Montrer que f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(f)=\left\{\overrightarrow{0_E}\right\}$.
   Note : on pourra commencer par montrer que si f est injective alors $\mathrm{Ker}(f)=\left\{\overrightarrow{0_E}\right\}$ puis on montrera que si $\mathrm{Ker}(f)=\left\{\overrightarrow{0_E}\right\}$, alors f est injective.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 Soit $a\in\mathbb{R}$. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est
$$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -a & a+1\end{pmatrix}$$

1. Montrer que $\mathrm{Spec}(f)=\{1,a\}$.
2. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $a\neq 1$.
3. On suppose ici que $\underline{a\neq 1}$.
   (a) Déterminer une matrice P inversible telle que le produit $D=P^{-1}AP$ soit une matrice diagonale que l'on précisera.

(b) En s'appuyant sur les matrices D et P, déterminer deux matrices M et N, dépendant de a, telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad A^n = \frac{1}{a-1}.M + \frac{a^n}{a-1}.N$$

Note : on rappelle que si $P = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ est une matrice inversible, alors

$$P^{-1} = \frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma}\begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}$$

4. On suppose ici que $\underline{a = 1}$.
   (a) Déterminer une base $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$ de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de f est $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $T^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
   (c) En s'appuyant sur T^n et le lien existant entre A et T, déterminer deux matrices R et S telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad A^n = R + n.S$$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 On se place dans l'espace $\mathcal{E}$, muni d'un point d'origine $\mathcal{O}$, complété en un repère orthonormé de l'espace par une base orthonormée $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\}$.

On considère alors l'endomorphisme f de $\mathcal{E}$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f) = A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Donner sans calcul les vecteurs $f(\overrightarrow{i})$, $f(\overrightarrow{j})$ et $f(\overrightarrow{k})$ en fonction de $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$.
2. Déterminer le noyau de f. On précisera sa dimension et on en donnera une base orthonormée $\{\overrightarrow{e_1}\}$.
3. Déterminer le rang de f.
4. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{e_2} = \frac{\sqrt{6}}{6}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ et $\overrightarrow{e_3} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ forment une base orthonormée de l'ensemble $\mathrm{Im}(f)$.
5. Montrer que la famille $\mathcal{B}_2 = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ est une base orthonormée de $\mathcal{E}$.
6. Montrer que
$$\forall \overrightarrow{v} \in \mathcal{E}, \qquad f \circ f(\overrightarrow{v}) = f(\overrightarrow{v})$$
7. En déduire sans calcul les coordonnées dans la base $\mathcal{B}_2$ des vecteurs $f(\overrightarrow{e_2})$ et $f(\overrightarrow{e_3})$.
8. Donner la matrice D de f dans la base $\mathcal{B}_2$.
9. Donner le spectre de f et déterminer une matrice P inversible telle que $P^{-1}AP = D$.
10. À quelle transformation de l'espace correspond la fonction f ?

⋆ ⋆
⋆

CORRECTION

Exercice 1 :

1. (a)
   - Puisque G est un sous espace vectoriel de E, il contient le vecteur nul $\overrightarrow{0_E}$. Mais alors
   $$\forall \overrightarrow{v_F} \in F, \qquad \overrightarrow{v_F} = \underbrace{\overrightarrow{v_F}}_{\in F} + \underbrace{\overrightarrow{0_E}}_{\in G} \in F + G$$
   - De même, puisque F est un sous espace vectoriel de E, il contient $\overrightarrow{0_E}$. Donc
   $$\forall \overrightarrow{v_G} \in G, \qquad \overrightarrow{v_G} = \underbrace{\overrightarrow{0_E}}_{\in F} + \underbrace{\overrightarrow{v_G}}_{\in G} \in F + G$$

   L'ensemble $F + G$ contient donc les sous ensembles F et G.

   (b)
   - Puisque F et G contiennent le vecteur $\overrightarrow{0_E}$, on a
   $$\overrightarrow{0_E} = \underbrace{\overrightarrow{0_E}}_{\in F} + \underbrace{\overrightarrow{0_E}}_{\in G} \in F + G$$
   Donc $F + G$ n'est pas vide.
   - Soients $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de $F + G$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
   $$\overrightarrow{u} \in F + G \;\Rightarrow\; \exists \overrightarrow{u_F} \in F,\ \overrightarrow{u_G} \in G \;/\; \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u_F} + \overrightarrow{u_G}$$
   $$\overrightarrow{v} \in F + G \;\Rightarrow\; \exists \overrightarrow{v_F} \in F,\ \overrightarrow{v_G} \in G \;/\; \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v_F} + \overrightarrow{v_G}$$
   Mais alors
   $$\begin{aligned}\lambda.\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} &= \lambda.\left(\overrightarrow{u_F} + \overrightarrow{u_G}\right) + \overrightarrow{v_F} + \overrightarrow{v_G} \\ &= (\lambda.\overrightarrow{u_F} + \overrightarrow{v_F}) + (\lambda.\overrightarrow{u_G} + \overrightarrow{v_G})\end{aligned}$$
   Or F et G étant deux sous espaces vectoriels de E, ils sont stables par combinaisons linéaires. Donc $(\lambda.\overrightarrow{u_F} + \overrightarrow{v_F}) \in F$ et $(\lambda.\overrightarrow{u_G} + \overrightarrow{v_G}) \in G$ et $\lambda.\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \in F + G$.

   Puisque $F + G$ est non vide et stable par combinaisons linéaires, c'est un sous espace vectoriel de E.

2. (a)
   $$\mathrm{Ker}(f) = \{\overrightarrow{v} \in E \;/\; f(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{0_E}\}$$
   $$\mathrm{Im}(f) = \{\overrightarrow{v} \in E \;/\; \exists \overrightarrow{u} \in E \;/\; \overrightarrow{v} = f(\overrightarrow{u})\}$$

   (b)
   - Puisque f est linéaire, on a $\overrightarrow{0_E} = f(\overrightarrow{0_E})$. Donc $\overrightarrow{0_E} \in \mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ est non vide.
   - Soients $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ deux vecteurs de $\mathrm{Im}(f)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Il existe $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ dans E tels que
   $$\overrightarrow{v_1} = f(\overrightarrow{u_1}) \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{v_2} = f(\overrightarrow{u_2})$$

Mais alors,

$$\lambda.\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} = \lambda.f(\overrightarrow{u_1}) + f(\overrightarrow{u_2}) = f(\lambda.\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2})$$

car f est linéaire. Le vecteur $\lambda.\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}$ est donc l'image par f d'un vecteur de E. Il est donc dans $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ est stable par combinaisons linéaires.

Ainsi, $\mathrm{Im}(f)$ est non vide et stable par combinaisons linéaires. C'est donc un sous espace vectoriel de E.

(c) Il s'agit ici de montrer une équivalence. Ainsi

- Supposons ici que f est injective. Alors toutes ses images sont différentes. Donc puisque $f(\overrightarrow{0_E}) = \overrightarrow{0_E}$, aucun vecteur non nul ne peut avoir la même image de $\overrightarrow{0_E}$. $\overrightarrow{0_E}$ est donc le seul vecteur du noyau.

- Réciproquement, supposons de $\mathrm{Ker}(f) = \{\overrightarrow{0_E}\}$. On rappelle que est injective si et seulement si
$$\forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in E, f(\overrightarrow{u}) = f(\overrightarrow{v}) \Longleftrightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$$
Ainsi, soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de E tels que $f(\overrightarrow{u}) = f(\overrightarrow{v})$. On a
$$\begin{aligned} f(\overrightarrow{u}) = f(\overrightarrow{v}) &\Leftrightarrow f(\overrightarrow{u}) - f(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{0_E} \\ &\Leftrightarrow f(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) = \overrightarrow{0_E} && \text{car } f \text{ est linéaire} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} \in \mathrm{Ker}(f) \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0_E} && \text{car } \mathrm{Ker}(f) = \{\overrightarrow{0_E}\} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} \end{aligned}$$
L'application f est donc bien injective.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 :

1. Les valeurs propres de f sont les racines du polynôme
$$\begin{aligned} \chi_f(\lambda) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -a & a+1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1+a-\lambda) + a \\ &= \lambda^2 - (1+a)\lambda + a \end{aligned}$$
Par ailleurs,
$$(\lambda - 1)(\lambda - a) = \lambda^2 - \lambda - a\lambda + a = \lambda^2 - (1+a)\lambda + a$$
Donc $\chi_f(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - a)$ et $\mathrm{Spec}(f) = \{1, a\}$.

2. Si $a \neq 1$, f admet deux valeurs propres d'ordre 1. Chacune est donc associée à une droite de vecteurs propres dans lesquels on peut trouver une base de $\mathbb{R}^2$ faite de vecteurs propres de f.

Sinon, 1 est valeur propre double. f est donc diagonalisable si et seulement si le sous espace propre E_1 est de dimension 2. Or

$$\begin{aligned} AX = X &\iff \left\{ \begin{array}{rcrcl} & & y & = & x \\ -x & + & 2y & = & y \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcrcl} -x & + & y & = & 0 \\ -x & + & y & = & 0 \end{array} \right. \\ &\iff y = x \end{aligned}$$

Donc $E_1 = \{(x,x),\ x \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((1,1))$ est une droite et f n'est pas diagonalisable.

3. (a) Toute matrice P dont les colonnes forment une base de $\mathbb{R}^2$ faite de vecteurs propres de f aura la propriété souhaitée. Or

   - les vecteurs propres associés à la valeur propre 1 sont les vecteurs non nuls de E_1, déterminés à la question précédente : $E_1 = \mathrm{Vect}((1,1))$.

   - Les vecteurs propres associés à la valeur propre a sont donnés les solutions du système

$$\begin{aligned} AX = aX &\iff \left\{ \begin{array}{rcrcl} & & y & = & ax \\ -ax & + & (1+a)y & = & ay \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcrcl} -ax & + & y & = & 0 \\ -ax & + & y & = & 0 \end{array} \right. \\ &\iff y = ax \end{aligned}$$

   Donc $E_a = \{(x,ax),\ x \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((1,a))$.

   Puisque $a \neq 1$, les vecteurs $\overrightarrow{u_1} = (1,1)$ et $\overrightarrow{u_2} = (1,a)$ sont indépendants. Ils forment donc une base de $\mathbb{R}^2$ et la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$$

   vérifie la relation

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

   (b) Puisque $D = P^{-1}AP$, on a $A = PDP^{-1}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = P.D^n.P^{-1}$. Or $P^{-1} = \frac{1}{a-1}\begin{pmatrix} a & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$ donc

$$\begin{aligned} A^n &= \frac{1}{a-1}.\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{a-1}.\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & -1 \\ -a^n & a^n \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{a-1}.\begin{pmatrix} a-a^n & a^n-1 \\ a-a^{n+1} & a^{n+1}-1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{a-1}.\underbrace{\begin{pmatrix} a & -1 \\ a & -1 \end{pmatrix}}_{M} + \frac{a^n}{a-1}.\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -a & a \end{pmatrix}}_{N} \end{aligned}$$

4. Si $a=1$, alors $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Les vecteurs $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$ cherchés doivent vérifier les équations vectorielles

$$f(\overrightarrow{e_1})=\overrightarrow{e_1} \qquad \text{et} \qquad f(\overrightarrow{e_2})=\overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{e_2}$$

Pour vecteur $\overrightarrow{e_1}$, on peut donc prendre tout vecteur non nul du sous espace propre E_1, soit par exemple $\overrightarrow{e_1}=(1,1)=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_c}$

Pour $\overrightarrow{e_2}$, en posant $\overrightarrow{e_2}=(x,y)=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_c}$, l'équation vectorielle $f(\overrightarrow{e_2})=\overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{e_2}$ se traduit par le système linéaire

$$\begin{aligned} A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\iff \left\{\begin{array}{rcrcl} & & y & = & 1+x \\ -x & + & 2y & = & 1+y \end{array}\right. \\ &\iff \left\{\begin{array}{rcrcl} -x & + & y & = & 1 \\ -x & + & y & = & 1 \end{array}\right. \\ &\iff y=x+1 \end{aligned}$$

En posant alors $\overrightarrow{e_2}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_c}$, la famille $\{\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de f est $T=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et en posant $P=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, on a $A=P.T.P^{-1}$.

(b) On pose

$$\mathcal{P}(n)\ :\ T^n=\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Initialisation : pour $n=1$, on a $T^1=T=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
- Hérédité : supposons qu'il existe un entier $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors

$$T^{n+1}=T\times T^n=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

La proposition $\mathcal{P}(n)$ étant vraie pour $n=1$ et héréditaire, elle est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

(c) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Puisque $A=P.T.P^{-1}$, on a $A^n=P.T^n.P^{-1}$. Or $P^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -n & n+1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -n & n+1 \\ -n-1 & n+2 \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}_{R}+n.\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}_{S} \end{aligned}$$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 :

1. Les images $f(\overrightarrow{i})$, $f(\overrightarrow{j})$ et $f(\overrightarrow{k})$ sont donnés par les colonnes de A. Précisément :

$$f(\overrightarrow{i}) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{i} - \frac{1}{3}\overrightarrow{j} - \frac{1}{3}\overrightarrow{k}$$

$$f(\overrightarrow{j}) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{i} + \frac{2}{3}\overrightarrow{j} - \frac{1}{3}\overrightarrow{k}$$

$$f(\overrightarrow{k}) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{i} - \frac{1}{3}\overrightarrow{j} + \frac{2}{3}\overrightarrow{k}$$

2. le noyau de f correspond à l'ensemble des solutions du système linéaire $AX = 0$. Or

$$AX = 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & y & - & z & = & 0 \\ -x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ -x & - & y & + & 2z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} & - & 3y & + & 3z & = & 0 \\ & & 3y & - & 3z & = & 0 \\ -x & - & y & + & 2z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{lcrcl} y & = & z & & \\ x & = & -y + 2z & = & z \end{array}\right.$$

D'où

$$\mathrm{Ker}(f) = \{(z, z, z),\ z \in \mathbb{R}\}$$

est un sous espace de $\mathcal{E}$ de dimension 1, engendré par exemple par le vecteur

$$\overrightarrow{e_1} = \frac{\sqrt{3}}{3}(1, 1, 1)$$

3. D'après le théorème du rang, on a

$$\mathrm{rg}(f) = \dim \mathcal{E} - \dim \mathrm{Ker}(f) = 3 - 1 = 2$$

4. L'ensemble $\mathrm{Im}(f)$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{E}$ de dimension 2. La famille $\{\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ est donc une base de $\mathrm{Im}(f)$ si et seulement si

- $\overrightarrow{e_2}$ et $\overrightarrow{e_3}$ appartiennent à $\mathrm{Im}(f)$,
- $\overrightarrow{e_2}$ et $\overrightarrow{e_3}$ sont de norme 1,
- $\langle \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3} \rangle = 0$.

Or

- Le vecteur $\overrightarrow{e_2}$ est colinéaire à $f(\overrightarrow{i}) \in \mathrm{Im}(f)$. Puisque $\mathrm{Im}(f)$ est stable par multiplication extérieure, $\overrightarrow{e_2}$ appartient à $\mathrm{Im}(f)$.

  D'autre part, on peut vérifier rapidement que $\overrightarrow{e_3}$ est colinéaire à la différence

  $$f(\overrightarrow{j}) - f(\overrightarrow{k}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

  Puisque $f(\overrightarrow{j})$ et $f(\overrightarrow{k})$ appartient à $\mathrm{Im}(f)$ et qu'il est stable par combinaisons linéaires, on a bien $\overrightarrow{e_3} \in \mathrm{Im}(f)$.

- $$\begin{aligned} ||\overrightarrow{e_2}|| &= \frac{\sqrt{6}}{6}\sqrt{2^2+(-1)^2+(-1)^2} &= \frac{6}{6} &= 1 \\ ||\overrightarrow{e_3}|| &= \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{0^2+1^2+(-1)^2} &= \frac{2}{2} &= 1 \end{aligned}$$

- $$\langle \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3} \rangle = \left\langle \frac{\sqrt{6}}{6}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{\sqrt{12}}{12}(2.0 + (-1).1 + 1.1) = 0$$

La famille $\{\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ est donc une BON de $\mathrm{Im}(f)$.

5. Puisque les trois vecteurs sont de norme 1 et que $\overrightarrow{e_2}$ et $\overrightarrow{e_3}$ sont orthogonaux, il suffit ici de démontrer que $\overrightarrow{e_1}$ est orthogonal à $\overrightarrow{e_2}$ et $\overrightarrow{e_3}$. Or

$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2} \rangle &= \frac{\sqrt{18}}{18}(1.2 + 1.(-1) + 1.(-1)) &= 0 \\ \langle \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_3} \rangle &= \frac{\sqrt{6}}{6}(1.0 + 1.1 + 1.(-1)) &= 0 \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{B}_2$ est bien une BON de $\mathcal{E}$.

6. Pour tout $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \in \mathcal{E}$, les coordonnées dans $\mathcal{B}$ de $f \circ f(v)$ sont données par le produit $A^2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$. Donc $f \circ f(\overrightarrow{v}) = f(\overrightarrow{v})$ pour tout $\overrightarrow{v} \in \mathcal{E}$ si et seulement si $A^2 = A$.

Or

$$\begin{aligned}
A^2 &= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2^2+(-1)^2+(-1)^2 & 2.(-1)+(-1).2+(-1)^2 & 2.(-1)+(-1)^2+(-1).2 \\ (-1).2+2.(-1)+(-1)^2 & (-1)^2+2^2+(-1)^2 & (-1)^2+2.(-1)+(-1).2 \\ (-1).2+(-1)^2+2.(-1) & (-1)^2+(-1).2+2.(-1) & (-1)^2+(-1)^2+2^2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix} \\
&= A
\end{aligned}$$

7. Puisque $\overrightarrow{e_2}$ et $\overrightarrow{e_3}$ appartiennent à l'ensemble $\mathrm{Im}(f)$, il existe $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ dans $\mathcal{E}$ tels que

$$\overrightarrow{e_2} = f(\overrightarrow{u}) \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{e_3} = f(\overrightarrow{v})$$

Mais alors

$$f(\overrightarrow{e_2}) = f\circ f(\overrightarrow{u}) = f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}$$

et

$$f(\overrightarrow{e_3}) = f\circ f(\overrightarrow{v}) = f(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}$$

8. Puisque $\overrightarrow{e_1} \in \mathrm{Ker}(f)$, on a $f(\overrightarrow{e_1}) = \overrightarrow{0_{\mathcal{E}}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}$ donc d'après les calculs précédents, on a

$$D = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_2}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

9. Les valeurs propres de f sont les coefficients diagonaux de la matrice D, donc $\mathrm{Spec}\{0,1\}$. Par ailleurs, la matrice P cherchée est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}_2$ soit

$$P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

10. La transformation f est une projection. Il s'agit précisément de la projection sur le plan $\mathrm{Im}(f)$ parallèlement à la droite $\mathrm{Ker}(f)$. Ces deux sous espaces vectoriels étant orthogonaux entre eux, il s'agit d'une projection orthogonale.

⋆ ⋆
⋆