CONTRÔLE CONTINU

Algèbre linéaire.

Durée : 1h30 *Les calculatrices sont autorisées.*

Tous les exercices sont indépendants.
Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation.

Exercice 1 Soit E un espace vectoriel.

1. Soit A une partie de E. Recopier et compléter la définition de l'ensemble $\text{Vect}(A)$ ci-dessous :
$$\text{Vect}(A) = \{v \in E \ / \ ....\}$$
2. Soient F et G deux sous espaces vectoriels de E. Recopier et compléter la définition de l'ensemble $F+G$ ci-dessous :
$$F+G = \{v \in E \ / \ ....\}$$
3. On considère ici deux parties A et B de E.
   (a) Montrer que $\text{Vect}(A \cap B) \subset \text{Vect}(A) \cap \text{Vect}(B)$.
   (b) Montrer que $\text{Vect}(A \cup B) = \text{Vect}(A) + \text{Vect}(B)$.
   (c) À-t-on toujours l'inclusion $\text{Vect}(A) \cap \text{Vect}(B) \subset \text{Vect}(A \cap B)$? Justifier.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}_C = \{e_1, e_2, e_3\}$ et on note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par
$$f(e_1) = -2e_1 + 2e_3, \quad f(e_2) = 3e_2, \quad f(e_3) = -4e_1 + 4e_3.$$

1. Donner la matrice $A = \text{mat}_{\mathcal{B}_C}(f)$.
2. Déterminer l'image $f(v)$ d'un vecteur $v = (x, y, z)$ quelconque de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer le noyau de f. On en donnera une description ensembliste puis on précisera sa dimension et on en donnera une base $\mathcal{B}_K$.
4. Montrer que la famille
$$\mathcal{B}_I = \{\varepsilon_2 = (-1, 0, 1), \varepsilon_3 = (0, 1, 0)\}$$
est une base de l'image $\text{Im}(f)$.
5. Montrer que la famille $\mathcal{B} = \mathcal{B}_K \cup \mathcal{B}_I$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

6. Donner la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}_C$ de $\mathbb{R}^2$ est

$$A = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_C}(f) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $\mathrm{Spec}(A) = \{0, 3\}$.
2. Déterminer les sous-espaces propres E_0 et E_3 de A. On précisera à chaque fois la dimension et on en donnera une base.
3. Montrer que la réunion des bases obtenues à la question précédente forme une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^2$ et donner la matrice de passage $P = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_C}(\mathcal{B}')$.
4. Donner sans calcul la valeur du produit $D = P^{-1} \times A \times P$.
5. Calculer D^2 et D^3. En déduire une conjecture sur la forme explicite de D^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.
6. Exprimer A^2 en fonction de D^2 et P. En déduire une conjecture donnant A^n en fonction de D^n et P pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
7. En admettant les conjectures ci-dessus, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un entier $\alpha_n \in \mathbb{N}$ que l'on précisera tel que $A^n = \alpha_n.A$.
8. Démontrer par récurrence les conjectures émises aux questions précédentes.

⋆ ⋆
⋆

CORRECTION

Exercice 1 :

1.
$$\text{Vect}(A) = \left\{ v \in E \ / \ \exists u_1, \ldots, u_n \in A, \ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R} \ / \ v = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k.u_k \right\}$$

2. Soient F et G deux sous espaces vectoriels de E. Recopier et compléter la définition de l'ensemble $F + G$ ci-dessous :
$$F + G = \{v \in E \ / \ \exists u_F \in F, \ u_G \in G \ / \ v = u_F + u_G\}$$

3. (a) Soit $v \in \text{Vect}(A \cap B)$. Montrons que v appartient à la fois à $\text{Vect}(A)$ et $\text{Vect}(B)$: par définition, il existe des vecteurs $u_1, \ldots, u_n \in A \cap B$ et des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que
$$v = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k.u_k$$
Mais puisque les vecteurs u_k sont dans $A \cap B$, il sont en particulier dans A. Le vecteur v est donc une combinaison linéaire de vecteurs de A. Donc $v \in \text{Vect}(A)$.
De même, puisque les vecteurs u_k sont dans $A \cap B$, ils sont en particulier dans B et $v \in \text{Vect}(B)$. $\square$

(b) On a ici deux inclusions à montrer. Ainsi :

- Montrons que $\text{Vect}(A \cup B) \subset \text{Vect}(A) + \text{Vect}(B)$.

  Considérons pour cela un vecteur quelconque $v \in \text{Vect}(A \cup B)$ et montrons que v appartient à $\text{Vect}(A) + \text{Vect}(B)$:

  Puisque $v \in \text{Vect}(A \cup B)$, il existe des vecteurs $u_1, \ldots, u_n \in A \cup B$ et des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que
$$v = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k.u_k$$
  Quitte à réorganiser les vecteurs $u_1, \ldots, u_n$, on peut supposer que les r premiers appartiennent à A et les $n - r$ derniers appartiennent à B. Ainsi :
$$v = \underbrace{\sum_{k=1}^{r} \lambda_k.u_k}_{u_A} + \underbrace{\sum_{k=r+1}^{n} \lambda_k.u_k}_{u_B}$$
  Par construction, on a alors $u_A \in \text{Vect}(A)$ et $u_B \in \text{Vect}(B)$. Le vecteur v est donc bien dans la somme $\text{Vect}(A) + \text{Vect}(B)$.

- Montrons maintenant que $\text{Vect}(A) + \text{Vect}(B) \subset \text{Vect}(A \cup B)$.

  Considérons pour cela un vecteur $v \in \text{Vect}(A) + \text{Vect}(B)$ quelconque et montrons que v appartient à $\text{Vect}(A \cup B)$:

Puisque $v \in \text{Vect}(A) + \text{Vect}(B)$, il existe $u_A \in \text{Vect}(A)$ et $u_B \in \text{Vect}(B)$ tels que

$$v = u_A + u_B$$

De plus, puisque $u_A \in \text{Vect}(A)$ et $u_B \in \text{Vect}(B)$, on a

$$u_A = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k.u_k, \quad \lambda_k \in \mathbb{R},\ u_k \in A \subset A \cup B$$

et

$$u_B = \sum_{k=1}^{m} \mu_k.v_k, \quad \mu_k \in \mathbb{R},\ v_k \in B \subset A \cup B$$

Mais alors

$$v = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k.u_k + \sum_{k=1}^{m} \mu_k.v_k$$

est une combinaison linéaire de vecteurs appartenant tous à $A \cup B$. Par définition, on a donc $v \in \text{Vect}(A \cup B)$. $\square$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 :

1. Par définition, la matrice $\text{mat}_{\mathcal{B}_C}(f)$ contient, en colonne, les coordonnées dans $\mathcal{B}_C$ des images $f(e_1)$, $f(e_2)$ et $f(e_3)$. Or par hypothèse,

$$f(e_1) = -2e_1 + 2e_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_C}, \quad f(e_2) = 3e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_C}, \quad f(e_3) - 4e_1 + 4e_3 \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_C}$$

D'où

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

2. Pour tout $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_C}$. Les coordonnées de $f(v)$ dans $\mathcal{B}_C$ sont donc données par le produit

$$A \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x - 4z \\ 3y \\ 2x + 4z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_C}$$

D'où

$$f(v) = (-2x - 4z, 3y, 2x + 4z)$$

3. Par définition, le noyau de f est constitué de l'ensemble de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ dont l'image par f est nulle. D'après les calculs précédent, un vecteur $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ est donc dans le noyau de f si et seulement si

$$\begin{aligned} f(v) = 0_{\mathbb{R}^3} &\iff (-2x - 4z, 3y, 2x + 4z) = (0, 0, 0) \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} -2x - 4z &=& 0 \\ 3y &=& 0 \\ 2x + 4z &=& 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} y &=& 0 \\ x &=& -2z \end{array} \right. \end{aligned}$$

D'où
$$\mathrm{Ker}(f) = \{(-2z, 0, z),\ z \in \mathbb{R}\}$$
Il s'agit d'une droite de $\mathbb{R}^3$ (de dimension 1) engendrée (par exemple) par le vecteur
$$\varepsilon_1 = (-2, 0, 1)$$

4. Notons tout d'abord que d'après le théorème du rang, on a
$$\dim(\mathrm{Im}(f)) = \mathrm{rg}(f) = \dim(E) - \dim(\mathrm{Ker}(f)) = 3 - 1 = 2$$
De plus,
$$\varepsilon_2 = \frac{1}{2} f(e_1) = f\left(\frac{1}{2}e_1\right) \in \mathrm{Im}(f) \qquad \text{et} \qquad \varepsilon_3 = f(e_2) \in \mathrm{Im}(f)$$
Puisque $\mathrm{Card}(\mathcal{B}_I) = \dim(\mathrm{Im}(f)$, la famille $\mathcal{B}_I$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$ si et seulement si elle est libre. Or puisque les vecteurs ε_2 et ε_3 ne sont pas colinéaires, il forme une famille libre et donc une base de $\mathrm{Im}(f)$.

5. $\mathcal{B} = \mathcal{B}_K \cup \mathcal{B}_I = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$. Puisque là encore, on a $\mathrm{Card}(B) = \dim(\mathbb{R}^3)$, la famille $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si elle est libre. Or
$$P = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_C}(B) = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
et
$$\det(P) = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$
La famille $\mathcal{B}$ est donc libre et c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

6. Pour déterminer la matrice $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f)$, on doit calculer les coordonnées dans $\mathcal{B}$ des vecteurs $f(\varepsilon_1)$, $f(\varepsilon_2)$ et $f(\varepsilon_3)$. Or
$$\begin{aligned}
f(\varepsilon_1) &= 0_{\mathbb{R}^3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \quad \text{car } \varepsilon_1 \in \mathrm{Ker}(f) \\
f(\varepsilon_2) &= A \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \\
&= \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_C} = 2\varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \\
f(\varepsilon_2) &= A \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_C} = 3\varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}
\end{aligned}$$
D'où
$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 :

1. On peut calculer les deux valeurs propres λ_1 et λ_2 de A à l'aide de son polynôme caractéristique $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda.I_2)$. On peut également noter que la matrice A n'étant pas inversible, elle admet $\lambda_1 = 0$ comme valeur propre. De plus, on doit avoir
$$\lambda_1 + \lambda_2 = \mathrm{tr}(A) = 1 + 2 = 3$$
d'où $\lambda_2 = 3$ et $\mathrm{Spec}(A) = \{0, 3\}$.

2. • $\underline{E_0}$:
$$AX = 0_{\mathbb{R}^2} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x + \frac{1}{2}y &=& 0 \\ 4x + 2y &=& 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \quad 2x + y = 0$$
E_0 est donc la droite de $\mathbb{R}^2$ (de dimension 1) engendrée par exemple par le vecteur
$$\varepsilon_1 = (1, -2)$$
• $\underline{E_3}$:
$$AX = 3X \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x + \frac{1}{2}y &=& 3x \\ 4x + 2y &=& 3y \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -2x + \frac{1}{2}y &=& 0 \\ 4x - y &=& 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow y = 4x$$
Là encore, E_3 est donc la droite de $\mathbb{R}^2$ (de dimension 1) engendrée par exemple par le vecteur
$$\varepsilon_2 = (1, 4)$$

3. Les vecteurs ε_1 et ε_2 étant non colinéaires, ils forment une base de $\mathbb{R}^2$ (car $\dim(\mathbb{R}^2) = 2 = \mathrm{Card}(\mathcal{B}')$) et
$$P = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_C}(\mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

4. Par construction, la matrice $D = P^{-1}AP$ est la matrice de f dans $\mathcal{B}'$. Or $\mathcal{B}'$ étant une base de vecteurs propres de $\mathbb{R}^2$, cette matrice est diagonale :
$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

5. Par le calcul, on trouve
$$D^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad D^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3^3 \end{pmatrix}$$
On conjecture donc que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad D^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} = 3^n. \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Puique $D = P^{-1}AP$, on a $A = PDP^{-1}$ et
$$A^2 = (PDP^{-1})^2 = PD\underbrace{P^{-1}P}_{I_2}DP^{-1} = P \times D^2 \times P^{-1}$$
On conjecture que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad A^n = P \times D^n \times P^{-1}$$

7. Puisque $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, on a $\det(P) = \frac{1}{6}$ et $P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. D'après la formule précédente, on a donc

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad A^n &= P \times D^n \times P^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \times 3^n.\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{3^{n-1}}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{3^{n-1}}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} \\
&= 3^{n-1}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 4 & 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

On a donc bien $A^n = \alpha_n.A$ avec $\alpha_n = 3^{n-1}$.

8.
   - La première conjecture est

     $$\mathcal{P}_1(n) \ : \ D^n = 3^n.\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

     Cette propriété a été évidente pour $n = 1$ et a été montrée pour $n = 2$ et $n = 3$. Elle est donc largement initialisée. Il reste donc à montrer l'hérédité. Or supposons qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $D^n = 3^n.\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a alors

     $$D^{n+1} = D \times D^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \times 3^n.\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 3^{n+1}.\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 3^{n+1}.\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

     Elle est donc également vraie au rang $n+1$. La propriété $\mathcal{P}_1(n)$ est donc vraie pour $n = 1$ et héréditaire. Par récurrence, elle est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

   - La seconde conjecture est

     $$\mathcal{P}_2(n) \ : \ A^n = P \times D^n \times P^{-1}$$

     Là encore, cette propriété est évidente pour $n = 1$. Supposons donc qu'elle est vraie pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$. On a alors

     $$\begin{aligned}
     A^{n+1} = A \times A^n &= P \times D \times \underbrace{P^{-1} \times P}_{=I_2} \times D^n \times P^{-1} \\
     &= P \times D \times D^n \times P^{-1} = P \times D^{n+1} \times P^{-1}
     \end{aligned}$$

     Elle est donc également vraie pour $n+1$ et, étant héréditaire, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

⋆ ⋆
⋆