# CONTRÔLE CONTINU

Algèbre linéaire - Sujet 1

Durée : 1h30 *Les calculatrices sont autorisées.*

Tous les exercices sont indépendants.
Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation.

**Exercice 1** On note $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$.
Par ailleurs, on note $F$ et $G$ respectivement

$$F = \{f \in E \ / \ \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(-x) = f(x)\} \quad \text{et} \quad G = \{f \in E \ / \ \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(-x) = -f(x)\}$$

1. *L'espace vectoriel $E$*
   (a) Donner la définition des opérations + et . qui font de $E$ un espace vectoriel :
   $$\forall (f, g) \in E^2, \qquad (f+g) \quad : \quad x \longmapsto ...$$
   $$\forall (\lambda, f) \in \mathbb{R} \times E, \qquad \lambda.f \quad : \quad x \longmapsto ...$$
   (b) Montrer que la fonction
   $$\begin{array}{rccc} \nu & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & 0 \end{array}$$
   est le vecteur nul de $(E, +, .)$.
2. *Les sous ensembles $F$ et $G$*
   (a) Montrer que $F$ et $G$ forment deux sous espaces vectoriels de $E$.
   (b) Montrer que $F \cap G = \{\nu\}$.
   (c) Montrer que $E = F \oplus G$.
   Ind. : pour $f \in E$, on pourra considérer les fonctions
   $$\varphi \ : \ x \longmapsto \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{et} \quad \psi \ : \ x \longmapsto \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

**Exercice 2** Dans $\mathbb{R}^3$, on note

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y + z = 0\} \quad \text{et} \quad B = \{(x, 0, 0), x \in \mathbb{R}\}$$

1. (a) Montrer que $A$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Déterminer sa dimension ainsi qu'une base $\mathcal{B}_A$.
2. (a) Montrer que $B$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Déterminer sa dimension ainsi qu'une base $\mathcal{B}_B$.
3. Montrer que les ensembles $A$ et $B$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$. Que dire de la famille $\mathcal{B} = \mathcal{B}_A \cup \mathcal{B}_B$ ?

4. Pour tout $v \in \mathbb{R}^3$, on note
$$v = v_A + v_B, \quad v_A \in A, \ \ v_B \in B$$
l'unique décomposition de $v$ dans la décomposition $\mathbb{R}^3 = A \oplus B$.

On note de plus $p$ l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par
$$p \ : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ v = v_A + v_B & \longmapsto & v_A \end{array}$$
appelées *projection sur $A$, parallèlement à $B$*.
   (a) Montrer que $p$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Donner sans calcul la matrice de $p$ dans la base $\mathcal{B}$ définie à la question 3.
   (c) Déterminer la matrice de $p$ dans la base canonique $\mathcal{B}_C$ de $\mathbb{R}^3$.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

**Exercice 3** 1. Soit
$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$
   (a) Montrer que $\mathrm{Spec}(A) = \left\{-\frac{1}{3}, 1\right\}$.
   (b) Déterminer les sous espaces propres de $A$. On en donnera en particulier la dimension ainsi qu'une base.
   (c) Donner une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que le produit $D = P^{-1} \times A \times P$ soit une matrice diagonale que l'on précisera.
   (d) En déduire $A^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. *Application*
On considère deux réservoirs $R_1$ et $R_2$ de contenance infinie, remplis de liquides et séparés par une barrière poreuse de sorte que, en 24h, deux tiers du contenu du réservoir $R_1$ passe dans $R_2$ et deux tiers du contenu du réservoir $R_2$ passe dans $R_1$.
   (a) Montrer que le modèle peut se mettre en équation sous la forme deux suites $(x_n)$ et $(y_n)$ telles que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \left\{ \begin{array}{ccc} x_{n+1} & = & \frac{1}{3}x_n + \frac{2}{3}y_n \\ \\ y_{n+1} & = & \frac{2}{3}x_n + \frac{1}{3}y_n \end{array} \right.$$
   On donnera les détails de cette mise en équation et l'on précisera en particulier le rôle du couple $(x_0, y_0)$ vis à vis de notre expérience.
   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$. Exprimer $X_{n+1}$ en fonction de $X_n$.
   (c) En déduire une expression de $X_n$ en fonction de $A$ et $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$.
   (d) Donner explicitement les expressions de $x_n$ et $y_n$ en fonction de $n$, $x_0$ et $y_0$.
   (e) Que dire de la répartition de liquide entre les deux réservoirs au bout d'un temps infini ?
   (f) Que dire du cas $x_0 = y_0$ ?

⋆ ⋆
⋆

# CORRECTION

**Exercice 1** :

1. (a)

$$\forall (f,g)\in E^2, \qquad (f+g) \ : \ x \longmapsto f(x)+g(y)$$

$$\forall (\lambda,f)\in \mathbb{R}\times E, \qquad \lambda.f \ : \ x \longmapsto \lambda \times f(x)$$

   (b) Pour tout $f\in E$, on a

$$f+\nu \ : \ x \longmapsto f(x)+\nu(x) = f(x)+0 = f(x)$$

   Autrement dit, on a $f+\nu=\nu$ et $\nu$ est bien l'élément neutre pour l'addition dans $E$.

2. (a) *L'ensemble $F$* : il s'agit ici de l'ensemble des fonctions paires définies sur $\mathbb{R}$.
   - La fonction $\nu$ est paire comme toute fonction constante ($\nu(-x)=0=\nu(x)$), donc $F$ est non vide.
   - Soient $f$ et $g$ deux fonctions de $F$ et $\lambda$ et $\mu$ deux nombres réels. Par définition, on a :

$$\forall x\in\mathbb{R}, \qquad (\lambda.f+\mu.g)(x) = \lambda\times f(x)+\mu\times g(x)$$

     Ainsi, pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}(\lambda.f+\mu.g)(-x) &= \lambda\times f(-x)+\mu\times g(-x) & \\ &= \lambda\times f(x)+\mu\times g(x) & \text{car } f,g\in F\\ &= (\lambda.f+\mu.g)(x) & \text{donc } \lambda.f+\mu.g\in F\end{aligned}$$

   L'ensemble $F$ est donc stable par combinaisons linéaires et non vide. C'est un sous espace vectoriel de $E$.

   *L'ensemble $G$* : il s'agit ici de l'ensemble des fonctions impaires définies sur $\mathbb{R}$.
   - La fonction $\nu$ est impaire ($\nu(-x)=0=-\nu(x)$), donc $G$ est non vide.
   - Soient $f$ et $g$ deux fonctions de $G$ et $\lambda$ et $\mu$ deux nombres réels. Par définition, on a :

$$\forall x\in\mathbb{R}, \qquad (\lambda.f+\mu.g)(x) = \lambda\times f(x)+\mu\times g(x)$$

     Ainsi, pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}(\lambda.f+\mu.g)(-x) &= \lambda\times f(-x)+\mu\times g(-x) & \\ &= -\lambda\times f(x)-\mu\times g(x) & \text{car } f,g\in G\\ &= -(\lambda.f+\mu.g)(x) & \text{donc } \lambda.f+\mu.g\in G\end{aligned}$$

   L'ensemble $G$ est donc stable par combinaisons linéaires et non vide. C'est un sous espace vectoriel de $E$.

   (b) Soit $f\in F\cap G$. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a

$$f(-x) = \begin{cases} f(x) & \text{car } f\in F\\ -f(x) & \text{car } f\in G\end{cases}$$

   Ainsi, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=-f(x)$. Donc $f(x)=0$ et $f=\nu$. D'où $F\cap G=\{\nu\}$.

   (c) Puisqu'on a étudié l'intersection $F\cap G$ à la question précédente, pour montrer que $E=F\oplus G$, il reste à montrer que toute fonction $f\in E$ peut s'écrire comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
   Or en notant $\varphi$ et $\psi$ les fonctions proposées, on a

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R}, \qquad \varphi(-x) &= \frac{f(-x)+f(--x)}{2} = \frac{f(-x)+f(x)}{2} = \varphi(x)\\ \psi(-x) &= \frac{f(-x)-f(--x)}{2} = \frac{f(-x)-f(x)}{2} = -\psi(x)\end{aligned}$$

Autrement dit, $\varphi \in F$ et $\psi \in G$. Par ailleurs, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\varphi(x) + \psi(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} = f(x)$$

donc $\varphi + \psi = f$. $\square$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

**Exercice 2** :

1. (a) • Le vecteur nul $0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0)$ appartient à $A$ car $0 + 0 + 0 = 0$. Donc $A \neq \emptyset$.
   • Soient $u = (x, y, z)$ et $v = (x', y', z')$ deux vecteurs de $A$ et $\lambda$ et $\mu$ deux réels. On a

$$\lambda.u + \mu.v = (\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z')$$

et

$$\begin{aligned}(\lambda x + \mu x') + (\lambda y + \mu y') + (\lambda z + \mu z') &= \lambda(x + y + z) + \mu(x' + y' + z') \\ &= 0 + 0 \quad \text{car } u \text{ et } v \text{ appartiennent à } A \\ &= 0 \quad \text{donc } \lambda.u + \mu.v \in A.\end{aligned}$$

$A$ est non vide et stable par combinaisons linéaires. C'est donc un SEV de $\mathbb{R}^3$.

(b) $A$ est l'ensemble des solutions d'une équation linéaire homogène. $A$ est donc associé à un système de rang 1 et $\dim(A) = 2$.

Par ailleurs, la description de $A$ à l'aide de deux paramètres permet d'en sortir une base :

$$\begin{aligned}A &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y + z = 0\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ z = -x - y\} \\ &= \{(x, y, -x - y),\ x, y \in \mathbb{R}\} = \{x.(1, 0, -1) + y.(0, 1, -1),\ x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathrm{Vect}(\{(1, 0, -1), (0, 1, -1)\})\end{aligned}$$

De plus, la famille $\mathcal{B}_A = \{\varepsilon_1 = (1, 0, -1), \varepsilon_2 = (0, 1, -1)\})$ étant libre (ses deux vecteurs ne sont pas colinéaires), elle forme une base de $A$.

2. (a) • Le vecteur nul $0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0)$ appartient à $B$ car ses deux dernières composantes sont nulles. Donc $B \neq \emptyset$
   • Soient $u = (x, 0, 0)$ et $v = (x', 0, 0)$ deux vecteurs de $B$ et $\lambda$ et $\mu$ deux réels. On a

$$\lambda.u + \mu.v = (\lambda x + \mu x', 0, 0) = (X, 0, 0)$$

avec $X = \lambda x + \mu x' \in \mathbb{R}$. Donc $\lambda.u + \mu.v \in B$.

$B$ est non vide et stable par combinaisons linéaires. C'est donc un SEV de $\mathbb{R}^3$.

(b) On a

$$B = \{x.(1, 0, 0),\ x \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((1, 0, 0))$$

$B$ est donc *une droite* de $\mathbb{R}^3$. Sa dimension est 1 et $\mathcal{B}_B = \{\varepsilon_3 = (1, 0, 0)\}$ en est une base.

3. Pour montrer que $\mathbb{R}^3 = A \oplus B$, on montre d'abord que $A$ et $B$ sont en somme directe, i.e. $A \cap B = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ : soit $v = (x, y, z) \in A \cap B$.
   • Puisque $v \in A$, on a $x + y + z = 0$.
   • Puisque $v \in B$, on a $y = z = 0$.
   Le seul vecteur de $\mathbb{R}^3$ vérifiant ces deux contraintes est donc le vecteur nul et la somme $A + B$ est directe.

   Par ailleurs, on a $\dim(A \oplus B) = \dim(A) + \dim(B) = 2 + 1 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$. La somme $A \oplus B$ est donc un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension 3. C'est $\mathbb{R}^3$ tout entier.

   De ce fait, la famille $\mathcal{B} = \mathcal{B}_A \cup \mathcal{B}_B$ est une base de $\mathbb{R}^3$. $\square$

4. (a) Soient $u = u_A + u_B$ et $v = v_A + v_B$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et leurs décompositions respectives selon la somme directe $A \oplus B$. Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\lambda.u + \mu.v = \lambda.(u_A + u_B) + \mu.(v_A + v_B) = \underbrace{(\lambda.u_A + \mu.v_A)}_{\in A} + \underbrace{(\lambda.u_B + \mu.v_B)}_{\in B}$$

Mais alors, par définition de $p$, on a

$$p(\lambda.u + \mu.v) = \lambda.u_A + \mu.v_A = \lambda.p(u) + \mu.p(v)$$

et $p$ est bien une application linéaire. Étant en outre de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$, c'est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

(b) Par définition, pour tout $v_A \in A$, on a $v_A = \underbrace{v_A}_{\in A} + \underbrace{0_{\mathbb{R}^3}}_{\in B}$, donc $p(v_A) = v_A$.

Ainsi, pour les vecteurs $\varepsilon_1$ et $\varepsilon_2$ de $\mathcal{B}_A$, on a

$$p(\varepsilon_1) = \varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \qquad \text{et} \qquad p(\varepsilon_2) = \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Par ailleurs, pour tout vecteur $v_B \in B$, on a $v_B = \underbrace{0_{\mathbb{R}^3}}_{\in A} + \underbrace{v_B}_{\in B}$, donc $p(v_B) = 0_{\mathbb{R}^3}$.

Ainsi, pour le vecteur $\varepsilon_3$ de $\mathcal{B}_B$, on a

$$p(\varepsilon_3) = 0_{\mathbb{R}^3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

En conclusion, on a

$$D = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) Pour déterminer la matrice $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_C}(p)$, on doit déterminer les coordonnées dans $\mathcal{B}_C$ des images $f(e_1)$, $f(e_2)$ et $f(e_3)$. Pour cela, on peut par exemple déterminer les décompositions des vecteurs $e_1$, $e_2$ et $e_3$ selon la somme directe $A \oplus B$.

- $e_1 = (1, 0, 0)$ appartient à $B$. Donc $p(e_1) = 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_C}$.
- Pour $e_2 = (0, 1, 0)$, on cherche $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que

  $$e_2 = (a, b, -a-b) + (c, 0, 0) \iff (0, 1, 0) = (a + c, b, -a - b)$$

  Les paramètres $a, b, c$ cherchés sont donc solutions du système

  $$\left\{ \begin{array}{rcl} a + c & = & 0 \\ b & = & 1 \\ -a - b & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcr} a & = & -1 \\ b & = & 1 \\ c & = & 1 \end{array} \right.$$

  D'où

  $$e_2 = \underbrace{(-1, 1, 0)}_{\in A} + \underbrace{(1, 0, 0)}_{\in B}$$

  et $p(e_2) = (-1, 1, 0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_C}$.
- De même, on a $e_3 = (0, 0, 1) = \underbrace{(-1, 0, 1)}_{\in A} + \underbrace{(1, 0, 0)}_{\in B}$, d'où $p(e_3) = (-1, 0, 1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_C}$.

  En conclusion, on a

  $$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_C}(p) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

**Exercice 3** :

1. (a) On détermine le spectre de $A$ à l'aide de son polynôme caractéristique :

$$\begin{aligned}\chi_A(\lambda) = \det(A-\lambda.I_2) &= \begin{vmatrix} \frac{1}{3}-\lambda & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3}-\lambda \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{1}{3}-\lambda\right)^2 - \frac{4}{9} = \left(\frac{1}{3}-\lambda-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}-\lambda+\frac{2}{3}\right) \\ &= (1-\lambda)\left(-\frac{1}{3}-\lambda\right)\end{aligned}$$

D'où $\mathrm{Spec}(A) = \left\{-\frac{1}{3}, 1\right\}$.

(b) Ici, chaque valeur propre étant d'ordre 1, chaque sous espace propre est une droite (de dimension 1, donc).

$$\begin{aligned} E_{-\frac{1}{3}} : \quad & AX = -\frac{1}{3}.X \\ \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y = -\frac{1}{3}x \\ \\ \frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y = -\frac{1}{3}y \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{l} 2x+2y=0 \\ \cancel{2x+2y=0} \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow & \; y=-x \end{aligned}$$

D'où $E_{-\frac{1}{3}} = \{(x,-x),\ x\in\mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((1,-1))$.

$$\begin{aligned} E_1 : \quad & AX = X \\ \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y = x \\ \\ \frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y = y \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{l} -2x+2y=0 \\ \cancel{2x-2y=0} \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow & \; y=x \end{aligned}$$

D'où $E_1 = \{(x,x),\ x\in\mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((1,1))$.

(c) D'après les calculs précédents, en notant $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, on a $P^{-1}\times A\times P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = D$.

(d) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a

$$A^n = P\times D^n\times P^{-1} = P\times \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{3}\right)^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\times P^{-1}$$

Par ailleurs, on a $\det(P)=2$ et $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. D'où

$$\begin{aligned} A^n &= \frac{1}{2}.\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{3}\right)^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{3}\right)^n & 1 \\ -\left(-\frac{1}{3}\right)^n & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{3}\right)^n+1 & -\left(-\frac{1}{3}\right)^n+1 \\ -\left(-\frac{1}{3}\right)^n+1 & \left(-\frac{1}{3}\right)^n+1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. (a) Pour un entier $n \in \mathbb{N}$, notons

- $x_n$ la quantité de liquide présente dans le réservoir $R_1$,
- $y_n$ la quantité de liquide présente dans le réservoir $R_2$.

D'après les données du problème, au jour $n+1$, le réservoir $R_1$ contient $\frac{1}{3}$ de ce qu'il contenait au jour $n$ (ce qui reste dans $R_1$) plus $\frac{2}{3}$ de ce que contenait le réservoir $R_2$ au jour $n$ (ce qui arrive de $R_2$). D'où la relation

$$x_{n+1} = \frac{1}{3}x_n + \frac{2}{3}y_n$$

On retrouve bien la première relation de récurrence de notre modèle.

Un raisonnement identique permet d'établir la seconde relation du modèle.

Notons que via cette représentation, les valeurs $x_0$ et $y_0$ représentent la quantité de liquide présente respectivement dans les réservoirs $R_1$ et $R_2$. C'est la position initiale de notre problème.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}x_n + \frac{2}{3}y_n \\ \\ \frac{2}{3}x_n + \frac{1}{3}y_n \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A \times X_n$$

(c) Par récurrence, on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad X_n = A^n \times X_0$$

(d) D'après les calculs précédents, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} &= A^n \times \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{3}\right)^n + 1 & -\left(-\frac{1}{3}\right)^n + 1 \\ \\ -\left(-\frac{1}{3}\right)^n + 1 & \left(-\frac{1}{3}\right)^n + 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \left(\left(-\frac{1}{3}\right)^n + 1\right)x_0 + \left(-\left(-\frac{1}{3}\right)^n + 1\right)y_0 \\ \\ \left(-\left(-\frac{1}{3}\right)^n + 1\right)x_0 + \left(\left(-\frac{1}{3}\right)^n + 1\right)y_0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D'où

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_n &=& \frac{1}{2}\left(\left(-\frac{1}{3}\right)^n + 1\right)x_0 + \left(-\left(-\frac{1}{3}\right)^n + 1\right)y_0 \\ \\ y_n &=& \frac{1}{2}\left(-\left(-\frac{1}{3}\right)^n + 1\right)x_0 + \left(\left(-\frac{1}{3}\right)^n + 1\right)y_0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} x_n &=& \dfrac{x_0+y_0}{2} + \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n (x_0 - y_0) \\ \\ y_n &=& \dfrac{x_0+y_0}{2} - \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n (x_0 - y_0) \end{array} \right.$$

(e) En passant à la limite $n \to +\infty$ dans les expressions ci-dessus, on constate que $x_n$ et $y_n$ tendent vers la moyenne $\frac{x_0+y_0}{2}$. Autrement dit, au fil des jours, le liquide se répartit de façon équitable dans les deux réservoirs.

(f) Si les deux réservoirs contiennent la même quantité au départ (i.e. $x_0 = y_0$), les quantités de liquides dans chaque réservoir restent constantes au fil des jours.

⋆ ⋆
⋆