# CONTRÔLE CONTINU - MATHÉMATIQUES

Espaces vectoriels - Applications linéaires

Nom : ................................. Prénom : .................................

Tous les exercices sont indépendants *Calculatrices autorisées*
Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation

## Exercice 1

Soit $(E, +, .)$ un espace vectoriel.

1. Soit $\mathcal{F} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ une famille de vecteurs de $E$.
   (a) Compléter les définitions ci-dessous.

| |
|---|
| (a) $\text{Vect}(\mathcal{F}) \ =$ |
| (b) $\text{rg}(\mathcal{F}) \ =$ |

   (b) Montrer que $\text{Vect}(\mathcal{F})$ est un sous espace vectoriel de $E$.

2. Soit $f$ une application de $E$ dans $E$.
   (a) Compléter les définitions ci-dessous.

| |
|---|
| (a) $f \in \mathcal{L}(E) \Longleftrightarrow$ |
| (b) $\text{Im}(f) \ =$ |
| (c) $\text{Ker}(f) \ =$ |

   (b) Montrer que si $f \in \mathcal{L}(E)$, alors $\text{Im}(f)$ et $\text{Ker}(f)$ sont des sous espaces vectoriels de $E$.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

## Exercice 2

On se place dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ muni des opérations usuelles et l'on note

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. (a) Montrer que la famille $\mathcal{B}_C = \{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ est libre.

(b) Montrer que la famille $\mathcal{B}_C$ engendre $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(c) En déduire la dimension de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et donner les coordonnées dans $\mathcal{B}_C$ d'une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ quelconque de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. On note

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et l'on note $f$ l'application définie sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par

$$\forall A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \quad f(A) = \frac{a+d}{2}.I + \frac{b+c}{2}.J$$

(a) Montrer que $f$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(b) Construire la matrice de $f$ dans la base $\mathcal{B}_C$.

(c) Déterminer le noyau de $f$. On en donnera la dimension ainsi qu'une base $\mathcal{B}_K$.

(d) Montrer que la famille $\mathcal{B}_I = \{I, J\}$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$ et donner la dimension de $\mathrm{Im}(f)$.

(e) Montrer que la famille $\mathcal{B} = \mathcal{B}_K \cup \mathcal{B}_I$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(f) Donner la matrice de $f$ dans la base $\mathcal{B}$.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

**Exercice 3**

On se place dans $\mathbb{R}^2$ et l'on note $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ \frac{3}{2} & -2 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $\mathrm{Spec}(f) = \{-1, 1\}$.
2. Déterminer les sous espaces propres de $f$.
3. Construire une base $\mathcal{B}_{\text{VEP}}$ de $\mathbb{R}^2$ faite de vecteurs propres de $f$. On donnera la matrice de passage $P = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_C}(\mathcal{B}_{\text{VEP}})$ et la matrice $D = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_{\text{VEP}}}(f)$.
4. Déterminer la matrice $A^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. En assimilant $\mathbb{R}^2$ au plan muni d'un repère orthonormé, quelle transformation du plan représente la fonction $f$ ?

⋆ ⋆
⋆

# CORRECTION

Espaces vectoriels et applications linéaires - 2021/2022

## Correction Exercice 1 (Exercice ▲)

1. (a)

| |
|---|
| (a) $\text{Vect}(\mathcal{F}) \;=\; \left\{ v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.v_i, \quad \lambda_i \in \mathbb{R} \right\}$ |
| (b) $\text{rg}(\mathcal{F}) \;=\; \dim(\text{Vect}(\mathcal{F}))$ |

   (b) — Pour $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$, on a

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.v_i = 0_E \in \text{ăVect}(\mathcal{F})$$

et $\text{Vect}(\mathcal{F})$ est non vide.

— Soient $(u,v) \in \text{Vect}(\mathcal{F})^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Par définition,

$$\exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \;/\; u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.v_i$$

$$\exists (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{R}^n \;/\; v = \sum_{i=1}^{n} \mu_i.v_i$$

Mais alors

$$\begin{aligned} \alpha.u + v &= \alpha.\sum_{i=1}^{n} \lambda_i.v_i + \sum_{i=1}^{n} \mu_i.v_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} (\alpha.\lambda_i + \mu_i).v_i \;\in\; \text{Vect}(\mathcal{F}) \end{aligned}$$

Donc $\text{Vect}(\mathcal{F})$ est stable par combinaisons linéaires.

— Étant non vide et stable par combinaisons linéaires, l'ensemble $\text{Vect}(\mathcal{F})$ est un sous espace vectoriel de $E$.

2. (a)

| |
|---|
| (a) $f \in \mathcal{L}(E) \iff \forall (u,v) \in E^2,\ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \quad f(\lambda.u + \mu.v) = \lambda.f(u) + \mu.f(v)$ |
| (b) $\text{Im}(f) \;=\; \{f(u), \quad u \in E\}$ |
| (c) $\text{Ker}(f) \;=\; \{u \in E \;/\; f(u) = 0_E\}$ |

   (b) — L'espace $\text{Im}(f)$ :

— L'application $f$ étant linéaires, on a

$$f(0_E) = 0_E$$

donc $0_E \in \text{Im}(f)$ et $\text{Im}(f)$ est non vide.

— Soient $(v_1, v_2) \in \text{Im}(f)^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Puisque chaque vecteur $v_i$ appartient l'image de $f$, il existe deux vecteurs $u_1$ et $u_2$ dans $E$ tels que

$$f(u_1) = v_1 \qquad \text{et} \qquad f(u_2) = v_2$$

Mais alors

$$\lambda.v_1 + v_2 = \lambda.f(u_1) + f(u_2) = f(\lambda.u_1 + u_2) \in \mathrm{Im}(f)$$

Donc $\mathrm{Im}(f)$ est stable par combinaisons linéaires.

— Étant non vide et stable par combinaisons linéaires, l'ensemble $\mathrm{Im}(f)$ est un sous espace vectoriel de $E$.

— L'espace $\mathrm{Ker}(f)$ :

— L'application $f$ étant linéaires, on a

$$f(0_E) = 0_E$$

donc $0_E \in \mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$ est non vide.

— Soient $(u_1, u_2) \in \mathrm{Ker}(f)^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$f(\lambda.u_1 + u_2) = \lambda.f(u_1) + f(u_2) = \lambda.0_E + 0_E = 0_E$$

donc $\lambda.u_1 + u_2 \in \mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$ est stable par combinaisons linéaires.

— Étant non vide et stable par combinaisons linéaires, l'ensemble $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous espace vectoriel de $E$.

## Correction Exercice 2 (Exercice ▲)

1. (a) Soit $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$\alpha.E_1 + \beta.E_2 + \gamma.E_3 + \delta.E_4 = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$$

On a

$$\begin{aligned}
&\alpha.E_1 + \beta.E_2 + \gamma.E_3 + \delta.E_4 = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})} \\
\Leftrightarrow\ & \alpha.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \gamma.\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \delta.\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow\ & \alpha = \beta = \gamma = \delta = 0
\end{aligned}$$

donc la famille $\mathcal{B}_C$ est libre.

(b) Pour tout $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on a

$$A = a.E_1 + b.E_2 + c.E_3 + d.E_4$$

donc toute matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est une combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}_C$. Ainsi, $\mathcal{B}_C$ engendre $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(c) La famille $\mathcal{B}_C$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Donc

$$\dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) = \mathrm{Card}(\mathcal{B}_C) = 4$$

et pour tout $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on a

$$A = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_C}$$

2. (a) Pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})^2$ et pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, si l'on note

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$$

on a

$$\lambda.A + \mu.B = \begin{pmatrix} \lambda a + \mu a' & \lambda b + \mu b' \\ \lambda c + \mu c' & \lambda d + \mu d' \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{aligned} f(\lambda.A + \mu.B) &= f\left(\begin{pmatrix} \lambda a + \mu a' & \lambda b + \mu b' \\ \lambda c + \mu c' & \lambda d + \mu d' \end{pmatrix}\right) \\ &= \frac{1}{2}(\lambda a + \mu a' + \lambda d + \mu d').I + \frac{1}{2}(\lambda b + \mu b' + \lambda c + \mu c').J \\ &= \lambda.\left(\frac{a+d}{2}.I + \frac{b+c}{2}.J\right) + \mu.\left(\frac{a'+d'}{2}.I + \frac{b'+c'}{2}.J\right) \\ &= \lambda.f(A) + \mu.f(B) \end{aligned}$$

donc $f$ est linéaire.

(b)

$$f(E_1) = \frac{1+0}{2}.I + \frac{0+0}{2}.J = \frac{1}{2}.I = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_C}$$

$$f(E_2) = \frac{0+0}{2}.I + \frac{1+0}{2}.J = \frac{1}{2}.J = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_C}$$

$$f(E_3) = \frac{0+0}{2}.I + \frac{0+1}{2}.J = \frac{1}{2}.J = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_C}$$

$$f(E_4) = \frac{0+1}{2}.I + \frac{0+0}{2}.J = \frac{1}{2}.I = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_C}$$

d'où

$$\text{mat}_{\mathcal{B}_C}(f) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) Une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ appartient au noyau de $f$ si et seulement si

$$f(A) = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})} \iff \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} a+d & = & 0 \\ b+c & = & 0 \\ b+c & = & 0 \\ a+d & = & 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} d & = & -a \\ c & = & -b \end{cases}$$

d'où

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}(f) &= \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & -a \end{pmatrix},\quad (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\} \\ &= \left\{a.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + c.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\quad (a,c)\in\mathbb{R}^2\right\}\end{aligned}$$

En posant alors

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

on a alors

$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(\{G,H\})$$

Par ailleurs, la famille $\mathcal{B}_K = \{G,H\}$ étant libre (car les deux matrices ne sont pas proportionnelles), elle forme une base de $\mathrm{Ker}(f)$. On en déduit en particulier que $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 2$.

(d) Pour tout $B \in \mathrm{Im}(f)$, il existe $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que

$$B = f(A) = \frac{a+d}{2}.I + \frac{b+c}{2}.J \in \mathrm{Vect}(\{I,J\})$$

donc la famille $\mathcal{B}_I = \{I,J\}$ engendre $\mathrm{Im}(f)$. Par ailleurs, les matrices $I$ et $J$ n'étant pas proportionnelles, la famille $\mathcal{B}_I$ est libre. C'est donc une base de $\mathrm{Im}(f)$ et $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$.

(e) On note

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_K \cup \mathcal{B}_I = \{G,H,I,J\}$$

Puisque

$$G = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_C},\quad H = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_C},\quad I = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_C},\quad J = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_C}$$

on a

$$P = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_C}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{aligned}\det(P) &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &\underset{L_4 \leftarrow L_4 + L_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} \\ &\underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0\end{aligned}$$

donc la famille est libre. Puisque $\mathrm{Card}(\mathcal{B}) = \dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$, la famille $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(f) Par construction, on a

$$f(G) = f(H) = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

De plus, on note que

$$f(I) = f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1+1}{2}.I + \frac{0+0}{2}.J = I = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

et

$$f(J) = f\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \frac{0+0}{2}.I + \frac{1+1}{2}.J = J = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

de sorte que

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

**Correction Exercice 3** (Exercice ▲)

1.
$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda.I_2) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 \\ \frac{3}{2} & -2-\lambda \end{vmatrix} = -(2-\lambda)(2+\lambda)+3$$
$$= -(4-\lambda^2)+3 = \lambda^2 - 1 = (\lambda-1)(\lambda+1)$$

   Donc
$$\mathrm{Spec}(A) = \{-1, 1\}$$

2. — $E_{-1}$ :
$$AX = -X \iff \left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & - & 2y & = & -x \\ \frac{3}{2}x & - & 2y & = & -y \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcr} 3x & - & 2y & = & 0 \\ \frac{3}{2}x & - & y & = & 0 \end{array}\right. \iff y = \frac{3}{2}x$$

   D'où
$$E_{-1} = \left\{\left(x, \frac{3}{2}x\right),\ x \in \mathbb{R}\right\}$$

   — $E_1$ :
$$AX = X \iff \left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & - & 2y & = & x \\ \frac{3}{2}x & - & 2y & = & y \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcr} x & - & 2y & = & 0 \\ \frac{3}{2}x & - & 3y & = & 0 \end{array}\right. \iff x = 2y$$

   D'où
$$E_1 = \{(2y, y),\ y \in \mathbb{R}\}$$

3. En posant
$$e_1 = (2,3) \quad \text{et} \quad e_2 = (2,1)$$
   la famille $\mathcal{B}_{\mathrm{VEP}} = \{e_1, e_2\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$ faite de vecteurs propres de $f$. Par ailleurs, on a
$$P = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_C}(\mathcal{B}_{\mathrm{VEP}}) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad D = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_{\mathrm{VEP}}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. On note ici que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$D^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 1^n \end{pmatrix} = \left\{\begin{array}{ll} I_2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ D & \text{si } n \text{ est impair} \end{array}\right.$$
   et Par ailleurs, par construction, on a
$$A = P \times D \times P^{-1}$$
   donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$A^n = P \times D^n \times P^{-1} = \left\{\begin{array}{ll} P \times I_2 \times P^{-1} & \text{si } n \text{ est pair} \\ P \times D \times P^{-1} & \text{si } n \text{ est impair} \end{array}\right. = \left\{\begin{array}{ll} I_2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ A & \text{si } n \text{ est impair} \end{array}\right.$$

5. En assimilant $\mathbb{R}^2$ au plan muni d'un repère orthonormé, l'application $f$ représente la symétrie par rapport à la droite d'équation
$$x - 2y = 0$$
   parallèlement à la droite d'équation
$$3x - 2y = 0$$