CONTRÔLE CONTINU

Nombres complexes et trigonométrie.

Tous les exercices sont indépendants. *Calculatrices autorisées*
Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation.

Exercice 1 Soient

$$z_1 = -2 + 2i \qquad z_2 = 1 + i\sqrt{3} \qquad z_3 = \frac{z_1}{z_2}$$

1. Déterminer une écriture exponentielle de z_1 et z_2.
2. En déduire un écriture exponentielle de z_3.
3. Montrer que $(z_3)^{12}$ est un nombre réel à déterminer.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2

1. *Un calcul préliminaire*
   Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$ un nombre complexe tel que $x = \mathrm{Re}(z)$ et $y = \mathrm{Im}(z)$.
   Donner l'expression de $|z^2|$, $\mathrm{Re}(z^2)$ et $\mathrm{Im}(z^2)$ en fonction de x et y.

2. *Racines carrées de* $\Delta = 3 + 4i$
   Soit $\delta = x + iy \in \mathbb{C}$ tel que $\delta^2 = 3 + 4i$.
   (a) Montrer que
   $$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 & (1) \\ x^2 - y^2 = 3 & (2) \\ xy > 0 & (3) \end{cases}$$
   (b) À l'aide des équations (1) et (2), montrer que $x^2 = 4$ et $y^2 = 1$.
   (c) À l'aide de l'inéquation (3), montrer que les racines carrées de $\Delta = 3 + 4i$ sont
   $$\delta_1 = 2 + i \qquad \text{et} \qquad \delta_2 = -2 - i$$

3. *Une équation polynomiale*
   Déterminer les solutions complexes de l'équation
   $$(E)\ :\ z^2 - 3iz - 3 - i = 0$$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 1. *Linéarisation de* $\cos^2(x)$

Montrer, à l'aide des formules d'Euler que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$

2. *Une équation trigonométrique*
   (a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

   $$(E)\ :\ \cos(2x) + \cos(x) = -1$$

   (b) Représenter sur le cercle trigonométrique l'ensemble des solutions de (E).

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 4 Soit $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on note $z_k = j^k$ et M_k le point du plan complexe d'affixe z_k.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a $z_k^3 = 1$.
2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a

   $$M_k M_{k+1} = \sqrt{3}$$

   Ind. : on pourra exprimer la distance $M_k M_{k+1}$ en fonction de $j-1$ puis exprimer $j-1$ en fonction de $\sin \frac{\pi}{3}$.
3. Placer dans le plan complexe les points M_0, M_1 et M_2. Que dire du triangle $(M_0 M_1 M_2)$?

⋆ ⋆
⋆

CORRECTION

Exercice 1 :

1. Si $z_1 = -2+2i$, on a $|z_1| = \sqrt{(-2)^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. D'où

$$z_1 = 2\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = 2\sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{4}}$$

De même, si $z_2 = 1+i\sqrt{3}$, on a $|z_2| = \sqrt{1^2+\sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2$ et

$$z_2 = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2e^{\frac{i\pi}{3}}$$

2. D'après les questions précédentes, on a

$$z_3 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{2\sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{4}}}{2e^{\frac{i\pi}{3}}} = \sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{4}-\frac{i\pi}{3}} = \sqrt{2}e^{\frac{5i\pi}{12}}$$

3.
$$z_3^{12} = \left(\sqrt{2}e^{\frac{5i\pi}{12}}\right)^{12} = 2^6.e^{\frac{12\times 5i\pi}{12}} = 64e^{5i\pi} = -64$$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 :

1. $|z^2| = |z|^2 = x^2+y^2$.
De plus, $z^2 = (x+iy)^2 = x^2+2ixy-y^2$ donc

$$\mathrm{Re}(z^2) = x^2-y^2 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}(z^2) = 2xy$$

2. (a) Si $\delta = x+iy$ vérifie $\delta^2 = \Delta$, alors d'après la question précédente, on a

$$\left\{\begin{array}{lllllllll} x^2+y^2 & = & |\delta^2| & = & |\Delta| & = & \sqrt{3^2+4^2} & = & \sqrt{25} \quad = \quad 5 \\ x^2-y^2 & = & \mathrm{Re}(\delta^2) & = & \mathrm{Re}(\Delta) & = & 3 & & \\ xy & = & \frac{1}{2}\mathrm{Im}(\delta^2) & = & \mathrm{Im}(\Delta) & = & 2>0 & & \end{array}\right.$$

(b) En additionnant les équations (1) et (2), on trouve

$$2x^2 = 8 \iff x^2 = 4$$

De même
$$(1)-(2) \iff 2y^2 = 2 \iff y^2 = 1$$

(c) Des équations précédentes, on tire $x = \pm 2$ et $y = \pm 1$. Or le produit xy étant positif, les réels x et y sont nécessairement de même signe. Ainsi

— soit $x>0$ et $y>0$ donc $x=2$ et $y=1$ et $\delta = 2+i$,

— soit $x < 0$ et $y < 0$ donc $x = -2$ et $y = -1$ et $\delta = -2 - i$.

On retrouve ici les racines proposées par l'énoncé.

3. L'équation (E) est une équation polynomiale de degré 2. On commence donc par calculer son discriminent :

$$\Delta = (-3i)^2 - 4.1.(-3-i) = -9 + 12 + 4i = 3 + 4i$$

Les solutions de (E) sont donc de la forme $z = \dfrac{3i \pm \delta}{2}$ où δ est une racine carrée de Δ. D'après les questions précédente, on peut prendre $\delta = 2 + i$ et les solutions de (E) sont

$$z_1 = \frac{3i - (2+i)}{2} = -1 + i \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{3i + (2+i)}{2} = 1 + 2i$$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 :

1. D'après les formules d'Euler, on a

$$\cos^2(x) = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(e^{2ix} + 2 + e^{-2ix}\right) = \frac{1}{4}(2\cos(2x) + 2) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

2. (a) D'après la question précédent, on a

$$\begin{aligned}\cos(2x) + \cos(x) = -1 &\Leftrightarrow 2\cos^2 x - 1 + \cos(x) = -1\\ &\Leftrightarrow \cos(x)(2\cos(x) + 1) = 0\\ &\Leftrightarrow \cos(x) = 0 \quad \text{où} \quad 2\cos(x) + 1 = 0\end{aligned}$$

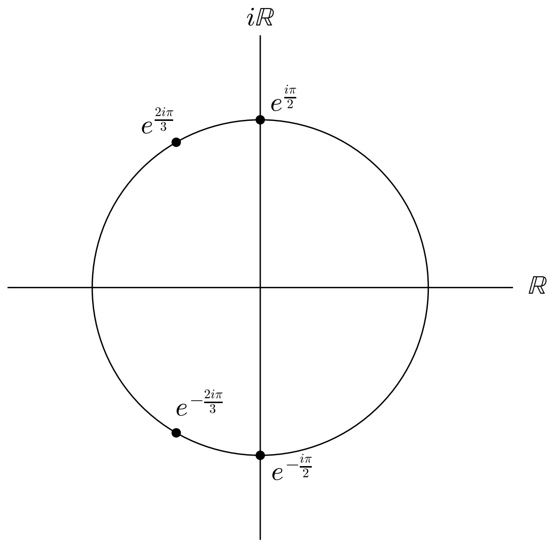
Or

$$\cos(x) = 0 \iff x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

correspond à deux points du cercle trigonométrique et

$$\begin{aligned}2\cos(x) + 1 = 0 &\Leftrightarrow \cos(x) = -\frac{1}{2}\\ &\Leftrightarrow \cos(x) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\\ &\Leftrightarrow x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\end{aligned}$$

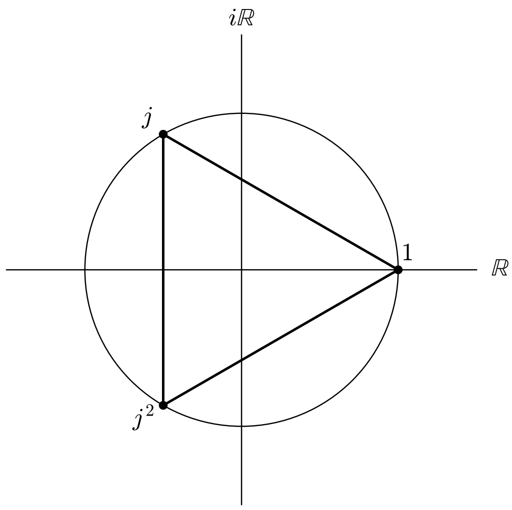
produit deux points supplémentaires. On obtient le dessin suivant :



⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 4 :

1. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a $z_k = j^k = \left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^k = e^{\frac{2ik\pi}{3}}$ donc $z_k^3 = \left(e^{\frac{2ik\pi}{3}}\right)^3 = e^{2ik\pi} = 1$.
2. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a
$$M_k M_{k+1} = |z_{k+1} - z_k| = |j^{k+1} - j^k| = |j^k(j-1)| = |j|^k.|j-1|$$
Puisque $|j| = 1$, on obtient $M_k M_{k+1} = |j-1|$.
D'autre part,
$$j - 1 = e^{\frac{2i\pi}{3}} - 1 = e^{\frac{i\pi}{3}}\left(e^{\frac{i\pi}{3}} - e^{-\frac{i\pi}{3}}\right) = 2ie^{\frac{i\pi}{3}}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = ie^{\frac{i\pi}{3}}\sqrt{3}$$
d'où $M_k M_{k+1} = |ie^{\frac{i\pi}{3}}\sqrt{3}| = \sqrt{3}$
3. D'après la question précédente, le triangle $(M_0M_1M_2)$ est un triangle équilatéral :



⋆ ⋆
⋆