CONTRÔLE CONTINU

Coniques, formes quadratiques.

Durée : 1h30. *Les calculatrices sont autorisées.*

Tous les exercices sont indépendants.
Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation.

Exercice 1 On se place dans le plan muni d'un repère $\mathcal{R}_1 = (O\,;\ \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé et on note $\mathcal{C}$ la conique dont l'équation dans $\mathcal{R}_1$ est

$$x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 6y = 2\sqrt{2} - 1$$

On note de plus q la partie quadratique de cette équation : $q(x, y) = x^2 - 2xy + y^2$.

1. Calculer le discriminant de q et en déduire la nature de la conique $\mathcal{C}$.
2. Déterminer un changement de variables

$$\begin{cases} x' = \alpha x + \beta y \\ y' = \gamma x + \delta y \end{cases}$$

tel que

(a) la forme réduite de q dans ce nouveau système de coordonnées est

$$\tilde{q}(x', y') = \kappa y'^2 \quad \text{(pour } \kappa \in \mathbb{R} \text{ à déterminer)}$$

(b) le repère $\mathcal{R}_2$ associé aux coordonnées $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ soit orthonormé.

3. Montrer que l'équation de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{R}_2$ est

$$y'^2 + \sqrt{2}y' \pm 2\sqrt{2}x' = \sqrt{2} - \frac{1}{2}.$$

(Le signe de x' dépend du repère choisi à la question précédente.)

4. Déterminer le changement de variables

$$\begin{cases} x' = X + A \\ y' = Y + B \end{cases}$$

tel que l'équation de $\mathcal{C}$ soit de la forme $Y^2 = 2pX$.
On note $\mathcal{R}_3$ le repère associé aux coordonnées $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$.

5. Donner les coordonnées du foyer F ainsi que l'équation de la directrice $\mathcal{D}$ et de l'axe focal Δ de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{R}_3$ puis dans $\mathcal{R}_2$ et $\mathcal{R}_1$.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (\mathcal{O}\,;\ \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. On note $\mathcal{S}$ la surface d'équation

$$\frac{x^2}{4} - y^2 - z^2 = 1$$

1. Donner le rang et la signature de la forme quadratique associée à $\mathcal{S}$.
2. Déterminer la nature des courbe $\mathcal{S}_x$, $\mathcal{S}_y$ et $\mathcal{S}_z$ respectivement obtenue en coupant $\mathcal{S}$ par les plans d'équations $x = 0$, $y = 0$ et $z = 0$.
3. En déduire la nature de la surface $\mathcal{S}$.
4. On considère ici l'intersection de $\mathcal{S}$ avec les plans d'équations $x = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
   (a) Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ cette intersection est-elle non vide ? (Justifier).
   (b) Déterminer les courbes $\mathcal{S}_\alpha$ obtenues dans ces cas.
5. On considère ici l'intersection de $\mathcal{S}$ avec les plans d'équations $y = \beta$, $\beta \in \mathbb{R}$.
   (a) Donner la nature des courbes $\mathcal{S}_\beta$ obtenues.
   (b) Donner, en fonction de β les paramètres a et b tels que l'équation de $\mathcal{S}_\beta$ soit de la forme
   $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1$$
   (c) On admettra ici que pour une hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1$, les coordonnées des foyers F et F' sont $(-c, 0)$ et $(c, 0)$ où
   $$c^2 = a^2 + b^2.$$
      i. Déterminer, pour chaque valeur de β, les coordonnées des foyers de $\mathcal{S}_\beta$ dans l'espace.
      ii. Que dire des courbes définies par l'ensembles de ces foyers ?

⋆ ⋆
⋆

CORRECTION

(Devoir coniques & formes quadratiques, ISA 2)

Exercice 1 :

1. $\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4 = 0$. Donc $\mathcal{C}$ est une parabole.
2. $q(x, y) = x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2$. Donc $q(x, y) = y'^2$ si $y' = x - y$.

   On pose donc $\gamma = \delta = 1$. Mais cette seule condition n'impose rien sur α et β. On détermine donc dans un premier temps α et β tel que le repère associé à ce changement de variable soit orthogonal.

   Pour cela, on commence par déterminer la matrice de passage associée au changement de variables
   $$\left\{ \begin{array}{rcr} x' & = & \alpha x + \beta y \\ y' & = & x - y \end{array} \right. \Leftrightarrow X' = AX$$
   où
   $$X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$
   La matrice de passage cherchée est donc
   $$A^{-1} = \frac{1}{\alpha + \beta} \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 1 & -\alpha \end{pmatrix}$$
   Le nouveau repère est donc constitué des vecteurs
   $$\overrightarrow{u} = \frac{1}{\alpha + \beta} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{v} = \frac{1}{\alpha + \beta} \begin{pmatrix} \beta \\ -\alpha \end{pmatrix}$$
   Pour que ce repère soit orthogonal, il faut donc que
   $$\frac{\beta}{(\alpha + \beta)^2} - \frac{\alpha}{(\alpha + \beta)^2} = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta.$$
   En prenant $\alpha = \beta = 1$, le repère $\mathcal{R}'$ constitué des vecteurs
   $$\overrightarrow{u} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{v} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$
   est donc orthogonal.

   Pour le rendre orthonormé, il suffit alors de normer les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. Or
   $$||\overrightarrow{u}|| = ||\overrightarrow{v}|| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$
   Le repère $\mathcal{R}_2$ cherché est donc donné par les vecteurs
   $$\overrightarrow{e_1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$
   La matrice de passage de $\mathcal{R}_1$ à $\mathcal{R}_2$ est donc
   $$P = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

3. D'après la question précédente, on a

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y' \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y' \end{cases}$$

En injectant ces égalités dans l'équation de $\mathcal{C}$, on obtient

$$\begin{aligned} (E) &\Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 6y = 2\sqrt{2} - 1 \\ &\Leftrightarrow 2y'^2 + \sqrt{2}(x' + y') - 3\sqrt{2}(x' - y') = 2\sqrt{2} - 1 \\ &\Leftrightarrow 2y'^2 - 2\sqrt{2}x' + 4\sqrt{2}y' = 2\sqrt{2} - 1 \\ &\Leftrightarrow y'^2 - \sqrt{2}x' + 2\sqrt{2}y' = \sqrt{2} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

4. On modifie encore l'équation précédente :

$$\begin{aligned} (E) &\Leftrightarrow (y' + \sqrt{2})^2 - 2 = \sqrt{2}x' + \sqrt{2} - \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow (y' + \sqrt{2})^2 = \sqrt{2}\left(x' + \frac{4 + 3\sqrt{2}}{4}\right) \end{aligned}$$

En notant

$$\begin{cases} X &= x' + \frac{4+3\sqrt{2}}{4} \\ Y &= y' + \sqrt{2} \end{cases}$$

on a donc

$$(E) \Leftrightarrow Y = 2pX$$

avec $p = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

5. Dans $\mathcal{R}_3$, les coordonnées du foyer F sont $\begin{pmatrix} \frac{d}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ et l'équation de $\mathcal{D}$ est $X = -\frac{d}{2}$. Or $d = p = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Donc

$$F = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4} \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_3} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{D} \,:\, X = -\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Dans $\mathcal{R}_2$, on a

$$F = \begin{pmatrix} -\frac{2+\sqrt{2}}{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_2} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{D} \,:\, x' = -1 - \sqrt{2}.$$

On peut alors passer du repère $\mathcal{R}_2$ à $\mathcal{R}_1$ via la matrice de passage P déterminée plus haut.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 :

1. $q(x, y, z) = \frac{x^2}{4} - y^2 - z^2$. Donc $\mathrm{rg}(q) = 3$ et $\sigma(q) = (1, 2)$.
2. (a) $x = 0 \Rightarrow -y^2 - z^2 = 1$. Aucune valeur de (y, z) ne peut vérifier cette égalité. L'intersection $\mathcal{S}_x$ est donc vide.

(b) $y = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{4} - z^2 = 1$. On reconnait l'équation réduite d'une hyperbole.

(c) $z = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{4} - y^2 = 1$. On reconnait encore l'équation réduite d'une hyperbole.

3. D'après les intersections ci-dessus, on peut supposer que la surface $\mathcal{S}$ est un hyperboloïde à deux nappes.

4. (a) L'intersection $\mathcal{S}_\alpha$ est donnée par l'équation

$$-y^2 - z^2 = 1 - \frac{\alpha^2}{4}$$

Cette intersection est donc non vide si et seulement si $1 - \frac{\alpha^2}{4} \leqslant 0$ donc pour $|\alpha| \geqslant 2$.

(b) Pour $|\alpha| \geqslant 2$, $\mathcal{S}_\alpha$ est donnée par l'équation

$$y^2 + z^2 = \frac{\alpha^2}{4} - 1.$$

On reconnaît l'équation d'un cercle (de rayon $\frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2 - 4}$).

5. (a) $\mathcal{S}_\beta$: $\frac{x^2}{4} - z^2 = 1 + \beta^2$. On reconnaît l'équation d'une hyperbole.

(b) En divisant l'équation précédente par $1 + \beta^2$, on obtient l'équation

$$\frac{x^2}{4(1+\beta^2)} - \frac{z^2}{1+\beta^2} = 1$$

Elle est donc de la forme voulue pour

$$a = 2\sqrt{1+\beta^2} \qquad \text{et} \qquad b = \sqrt{1+\beta^2}.$$

(c) i. D'après l'égalité donnée, on a

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{5 + 5\beta^2}.$$

Dans l'espace, les foyers des intersections $\mathcal{S}_\beta$ sont donc les points

$$F = \begin{pmatrix} -\sqrt{5+5\beta^2} \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad F' = \begin{pmatrix} \sqrt{5+5\beta^2} \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix}.$$

ii. On constate que tous ces foyers sont sur la courbe de l'espace donnée par

$$\left\{ \begin{array}{rcl} z & = & 0 \\ x^2 - 5y^2 & = & 5 \end{array} \right.$$

On reconnait l'équation d'une hyperbole.