CONTRÔLE CONTINU

Coniques, quadriques, formes quadratiques

Durée : 1h30 *Les calculatrices sont autorisées.*

Tous les exercices sont indépendants.
Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation.

Exercice 1 On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R}$ et l'on note $\mathcal{C}$ la courbe du plan d'équation

$$q(x,y) = 1$$

où $q(x,y) = x^2 - 3xy + 5y^2$.

1. Donner la matrice A de q.
2. Montrer que les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = \frac{11}{2}$ et $\lambda_2 = \frac{1}{2}$.
3. Donner la signature de q et la nature de $\mathcal{C}$.
4. Déterminer une BON du plan formée de vecteurs propres de A.
5. En déduire les coordonnées des 4 sommets de $\mathcal{C}$ dans le repère $\mathcal{R}$.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 Soit

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

1. (a) Donner sous forme développée la forme quadratique $Q(x,y,z)$ associée à M.
   (b) Déterminer le rang et la signature de Q. Justifier.
2. On se place dans un repère orthonormé de l'espace et on note $\mathcal{S}$ la surface d'équation

$$Q(x,y,z) = z + 1$$

   (a) Déterminer la nature de la courbe obtenue en coupant $\mathcal{S}$ par le plan d'équation $z = 0$.
   (b) Déterminer la nature des courbes obtenues en coupant $\mathcal{S}$ par les plans d'équations $y = 0$ et $x = 0$.
   (c) Faire une esquisse de la surface $\mathcal{S}$.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 On considère l'algorithme suivant :

```
1 var('x y e')

2 d = 2
3 p = e*d

4 P(x,y,e) = (1 - e^2)x^2 + y^2 - 2epx - p^2

5 graphe = implicit_plot(P(x,y,1),(x,-3,3),(y,-3,3),color='red')

6 for e in srange(0,3,1/10):
7      graphe = graphe + implicit_plot(P(x,y,e),(x,-3,3),(y,-3,3))

8 graphe.show(aspect_ratio=1)
```

1. À quoi correspond le polynôme défini à la ligne **4** ?
2. Quel graphe contient la variable `graphe` si l'on interrompt l'algorithme avant la ligne **6** ?
3. Décrire l'action effectuée par la boucle `for` des lignes **6** et **7**.
4. Qu'affiche le logiciel à la fin de l'algorithme ?
5. *Facultatif* : que dire de la première "courbe" ajouté à la variable `graphe` à l'entrée de la boucle `for` ?

⋆ ⋆
⋆

CORRECTION

Exercice 1

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 5 \end{pmatrix}$.
2. $$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 5-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)(5-\lambda) - \frac{9}{4} \\ &= \left(\lambda - \frac{11}{2}\right)\left(\lambda - \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$
3. $\sigma(q) = (2, 0)$ donc $\mathcal{C}$ est une ellipse.
4. $\lambda = \frac{11}{2}$:
   (a) $$\begin{aligned} AX = \frac{11}{2}X &\Leftrightarrow \left(A - \frac{11}{2}I\right)X = 0 \\ &\Leftrightarrow -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}y = 0 \quad (L_2) \\ &\Leftrightarrow y = -3x \end{aligned}$$
   Donc $\overrightarrow{v_{11/2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}(1, -3)$
   (b) $$\begin{aligned} AX = \frac{1}{2}X &\Leftrightarrow \left(A - \frac{1}{2}I\right)X = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}y = 0 \quad (L_1) \\ &\Leftrightarrow y = \frac{1}{3}x \end{aligned}$$
   Donc $\overrightarrow{v_{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}(3, 1)$

   La BON cherchée est alors $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{v_{11/2}}, \overrightarrow{v_{1/2}}\}$.

   Note : puisque A est symétrique, les deux vecteurs propres sont automatiquement orthogonaux (on peut le vérifier).
5. Dans la base $\mathcal{B}$, les sommets de $\mathcal{C}$ sont
   $$S_{1,3} = \left(\pm\sqrt{\frac{2}{11}}, 0\right)_{\mathcal{B}}, \qquad S_{2,4} = \left(0, \pm\sqrt{2}\right)_{\mathcal{B}}$$
   Pour obtenir ces coordonnées dans $\mathcal{R}$, il suffit de multiplier les coordonnées ci-dessus par la matrice de passage $P = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$:
   $$S_{1,3} = \pm\left(\sqrt{\frac{1}{55}}, -3\sqrt{\frac{1}{55}}\right)_{\mathcal{R}}, \qquad S_{2,4} = \pm\left(3\sqrt{\frac{2}{10}}, \sqrt{\frac{2}{10}}\right)_{\mathcal{R}}$$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2

1. $Q(x,y,z) = 3x^2 + 3y^2 + 2z^2 - 2xy + 4xz - 4yz$.
2. Pour déterminer le rang et la signature de Q, on peut déterminer les valeurs propres de M. On trouve $\mathrm{Spec(M)} = \{6,2,0\}$. On a donc $\mathrm{Rg(Q)} = 2$ et $\sigma(Q) = (2,0)$.

   Note : on peut également utiliser la décomposition de Gauss, mais la présence des tous les termes rectangles rend l'opération un peu plus longue.
3. (a) L'équation de la courbe concernée est $3x^2 + 3y^2 - 2xy = 1$. On calcule

   $$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 3 \times 3 = -32 < 0.$$

   La courbe étudiée est donc une ellipse.

   (b) En effectuant le même travail pour les courbes obtenues en coupant $\mathcal{S}$ par les plans $x = 0$ et $y = 0$, on trouve encore deux ellipses (ATTENTION : il ne faut considérer que les parties quadratiques !).

   (c) Le rang et la signature de Q montrent que $\mathcal{S}$ est un paraboloïde elliptique.

   On peut observer $\mathcal{S}$ et les différentes coupes à l'aide de Sage grâce aux commandes suivantes :

   Définition de $\mathcal{S}$:

   ```
   par=implicit_plot3d(3*x^2+3*y^2+2*z^2-2*x*y+4*x*z-4*y*z-
   z-1,(x,-2,2),(y,-2,2),(z,-2.5,2.5),color='green')
   ```

   Définition du plan $z = 0$:

   ```
   pz=implicit_plot3d(z,(x,-2,2),(y,-2,2),(z,-2.5,2.5),color='yellow',
   opacity=0.5)
   ```

   Définition du plan $x = 0$:

   ```
   px=implicit_plot3d(x,(x,-2,2),(y,-2,2),(z,-2.5,2.5),color='yellow',
   opacity=0.5)
   ```

   Définition du plan $y = 0$:

   ```
   py=implicit_plot3d(y,(x,-2,2),(y,-2,2),(z,-2.5,2.5),color='yellow',
   opacity=0.5)
   ```

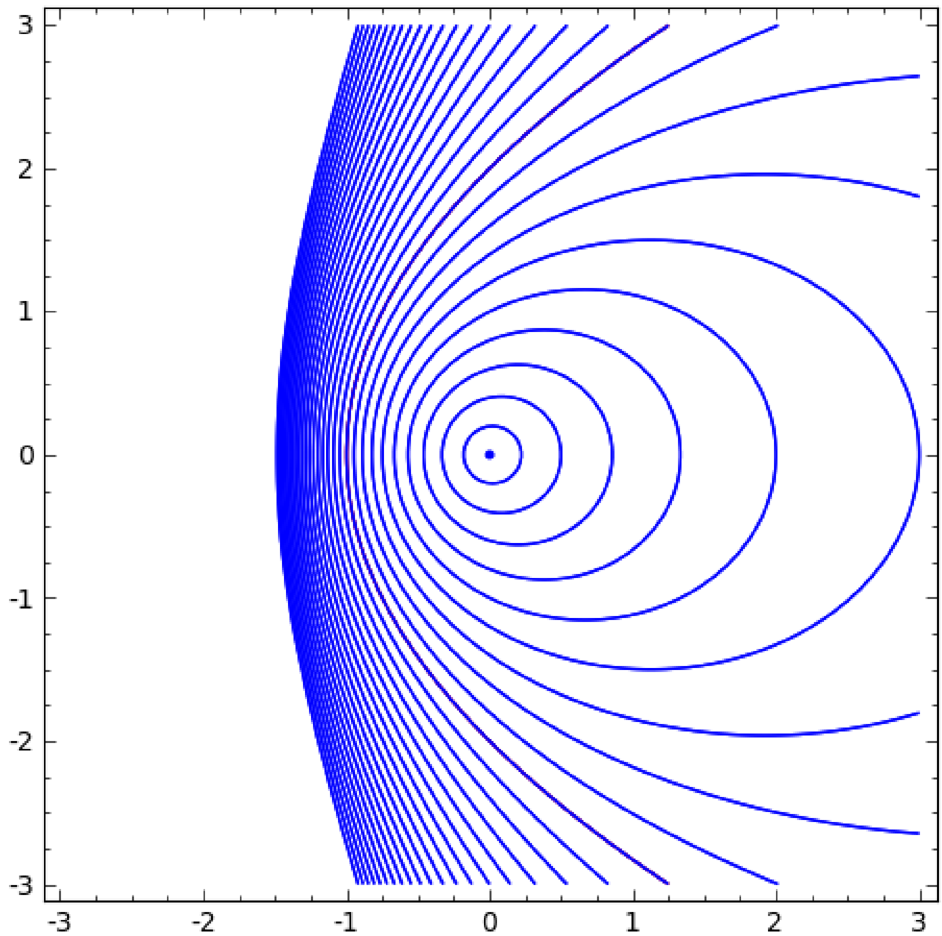
   En additionnant ces différents graphes, on obtient les coupes que l'on veut.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3

1. Le polynôme de la ligne 4 correspond à l'équation générale d'une conique **dans le repère centré au foyer**.

2. À la ligne 5, la variable `graphe` contient une parabole (puisque $e = 1$).
3. Lors de la boucle, on ajoute à la variable `graphe` les coniques correspondant aux excentricités e allant de 0 à 3 par un pas de $\frac{1}{10}$.
4. A la fin de l'algorithme, le logiciel affiche toutes les coniques de distance caractéristique $d = 2$ et d'excentricité e pour e entre 0 et 3 :



5. À l'entrée de la boucle, la courbe ajoutée à la variable `graphe` est une conique d'excentricité 0. Il s'agit d'un seul point : le foyer.