CONTRÔLE CONTINU

Coniques, quadriques, formes quadratiques

Durée : 1h30 *Les calculatrices sont autorisées.*

Tous les exercices sont indépendants.
Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation.

Exercice 1 On se place dans un repère $\mathcal{R}$ quelconque du plan et l'on considère la courbe $\mathcal{H}$ du plan d'équation

$$\mathcal{H} \quad : \quad x^2 + 3xy + 2y^2 - 2x + y - 1 = 0$$

1. Isoler la partie quadratique $q(x, y)$ de l'équation de $\mathcal{H}$ et en déduire la nature de la courbe $\mathcal{H}$.
2. Mettre $q(x, y)$ sous forme canonique. En déduire un changement de variable $(x, y) \rightsquigarrow (u, v)$ tel que
$$q(x, y) \rightsquigarrow \tilde{q}(u, v) = u^2 - \frac{1}{4}v^2.$$
3. Montrer que dans le repère associé aux coordonnées (u, v), l'équation de $\mathcal{H}$ est
$$u^2 - \frac{1}{4}v^2 - 2u + 4v - 1 = 0$$
4. À l'aide d'un second changement de variable $(u, v) \rightsquigarrow (X, Y)$, déterminer une troisième équation de $\mathcal{H}$ de la forme
$$X^2 - \frac{1}{4}Y^2 = K$$
pour une valeur de K à préciser.
5. Déterminer les coordonnées (x_0, y_0) du centre de $\mathcal{H}$ dans le repère $\mathcal{R}$.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O\,;\,\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Pour tout $m > 0$, on considère la conique $\mathcal{C}_m$ d'équation

$$x^2 + 2mxy + y^2 = 1.$$

1. Déterminer la nature de $\mathcal{C}_m$ en fonction de m.
2. Construire la matrice A_m de la forme quadratique $q(x, y) = x^2 - 2mxy + y^2$ et montrer son spectre est
$$\mathrm{Sp}(A_m) = \{1 - m, 1 + m\}.$$

3. Montrer que toutes les coniques $\mathcal{C}_m$ ont les mêmes axes principaux dont on donnera des vecteur directeurs normés.
4. Donner l'équation de $\mathcal{C}_m$ dans le repère formé des axes principaux.
5. Donner une équation de l'axe focal dans le cas $m \neq 1$ (on distinguera les cas $m < 1$ et $m > 1$).
6. Montrer que $\mathcal{C}_1$ est un couple de droites parallèles dont on donnera les équations dans $\mathcal{R}$.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 On se place dans l'espace muni d'un repère $\mathcal{R} = (O\,;\,\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ orthonormé et l'on note $\mathcal{Q}$ la quadrique de l'espace dont l'équation dans $\mathcal{R}$ est

$$x^2 - yz = 1$$

1. Déterminer la matrice M de $q(x,y,z) = x^2 - yz$.
2. Montrer que le spectre de M est $\mathrm{Sp}(M) = \left\{\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right\}$.
3. En déduire le rang, la signature et la nature de $\mathcal{Q}$.
4. Déterminer un repère $\mathcal{R}'$ orthonormé de l'espace dans lequel l'équation de $\mathcal{Q}$ est

$$\frac{1}{2}X^2 + Y^2 - \frac{1}{2}Z^2 = 1.$$

5. On se place maintenant dans le repère $\mathcal{R}'$ déterminé à la question précédente et pour tout $\alpha \geqslant 0$, on note $\mathcal{H}_\alpha$ l'intersection de $\mathcal{Q}$ avec le plan d'équation $Y = \alpha$.
   (a) Montrer que si $\alpha \neq 1$, $\mathcal{H}_\alpha$ est une hyperbole dont on précisera l'axe focal en fonction de α.
   (b) Décrire l'intersection $\mathcal{H}_1$.
   (c) Construire un programme `Sage` qui, à l'aide d'une boucle `for`, trace dans un même repère du plan les courbes $\mathcal{H}_\alpha$ pour $\alpha \in [0, 3]$ par pas de 0.5.

⋆ ⋆
⋆

CORRECTION

Exercice 1 :

1. La partie quadratique de l'équation de $\mathcal{H}$ est $q(x,y) = x^2+3xy+2y^2$ dont le discriminant est $\Delta = (3)^2 - 4\times 2 = 1 > 0$. $\mathcal{H}$ est donc une hyperbole.
2. $$\begin{aligned} q(x,y) &= x^2+3xy+2y^2 \\ &= \left(x+\frac{3}{2}y\right)^2 - \frac{1}{4}y^2 \end{aligned}$$

   En posant le changement de variable $\left\{\begin{array}{lcl} u &=& x+\frac{3}{2}y \\ v &=& y \end{array}\right.$, on a
   $$q(x,y) = u^2 - \frac{1}{4}v^2 = \tilde{q}(u,v).$$
3. En inversant le changement de variable, on obtient $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& u-\frac{3}{2}v \\ y &=& v \end{array}\right.$ et
   $$\begin{aligned} x^2+3xy+2y^2-2x+y-1=0 &\Leftrightarrow \left(x+\frac{3}{2}y\right)^2 - \frac{1}{4}y^2 - 2x + y - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow u^2 - \frac{1}{4}v^2 - 2\left(u-\frac{3}{2}v\right) + v - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \boxed{u^2 - \frac{1}{4}v^2 - 2u + 4v - 1 = 0} \end{aligned}$$
4. En mettant, dans l'équation ci dessus, les polynômes en u et v sous forme canonique, on obtient :
   $$\begin{aligned} u^2-2u-\frac{1}{4}(v^2-16v)-1=0 &\Leftrightarrow (u-1)^2-1-\frac{1}{4}((v-8)^2-64)-1=0 \\ &\Leftrightarrow (u-1)^2-\frac{1}{4}(v-8)^2+14=0 \end{aligned}$$

   En posant $\left\{\begin{array}{lcl} X &=& u-1 \\ Y &=& v-8 \end{array}\right.$, on obtient bien une équation de la forme
   $$X^2 - \frac{1}{4}Y^2 = K$$
   avec $K = -14$.
5. La dernière équation est réduite. Le centre de $\mathcal{H}$ est donc le point de coordonnées $(X_0, Y_0) = (0,0)$. En "remontant" les changements de variables, on obtient $(u_0, v_0) = (1, 8)$ puis $(x_0, y_0) = (-11, 8)$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 :

1. Le discriminant de la forme quadratique $q(x,y) = x^2 + 2mxy + y^2$ est

$$\Delta_m = 4m^2 - 4 = 4(m^2 - 1).$$

Ainsi,
- si $0 < m < 1$, $\Delta_m < 0$ et $\mathcal{C}_m$ est une ellipse,
- si $m = 1$, $\Delta_m = 0$ et $\mathcal{C}_m$ est une parabole,
- si $m > 1$, $\Delta_m > 0$ et $\mathcal{C}_m$ est une hyperbole.

2. $A_m = \begin{pmatrix} 1 & m \\ m & 1 \end{pmatrix}$. Son polynôme caractéristique est

$$\chi_m(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & m \\ m & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - m^2 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 - m^2.$$

Le discriminant de $\chi_m(\lambda)$ est $\Delta_m = 4 - 4(1-m^2) = 4m^2$ et les deux valeurs propres sont

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4m^2}}{2} = 1 \pm m.$$

3. Les axes principaux de $\mathcal{C}_m$ sont donnés par les sous espaces propres de A_m. On résout donc les systèmes linéaires $A_m X = \lambda_i X$ associés à chaque valeur propre :

- $\underline{\lambda = (1-m)}$:

$$AX = (1-m)X \Leftrightarrow \begin{cases} x + my &= (1-m)x \\ mx + y &= (1-m)y \end{cases} \Leftrightarrow y = -x.$$

Quelque soit m, le sous espace propre E_{1-m} est donc la droite d'équation $y = -x$ engendrée par le vecteur $\overrightarrow{e_1} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1,-1)$.

- $\underline{\lambda = (1+m)}$:

$$AX = (1+m)X \Leftrightarrow \begin{cases} x + my &= (1+m)x \\ mx + y &= (1+m)y \end{cases} \Leftrightarrow y = x.$$

Quelque soit m, le sous espace propre E_{1+m} est donc la droite d'équation $y = x$ engendrée par le vecteur $\overrightarrow{e_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1,1)$.

4. Dans le repère $\mathcal{R}' = (O\,;\ \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, l'équation de $\mathcal{C}_m$ est

$$(1-m)X^2 + (1+m)Y^2 = 1.$$

5.
- Si $0 < m < 1$, on a $0 < 1-m < 1+m$. L'axe focal de $\mathcal{C}_m$ est donc l'axe (OX) dont l'équation dans $\mathcal{R}$ est $y = -x$.
- Si $m > 1$, on a $1-m < 0 < 1+m$. L'axe focal de $\mathcal{C}_m$ est donc l'axe (OY) dont l'équation dans $\mathcal{R}$ est $y = x$.

6. Si $m = 1$, l'équation de $\mathcal{C}_1$ dans le repère $\mathcal{R}'$ est

$$2Y^2 = 1 \Leftrightarrow Y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Il s'agit donc bien de deux droites parallèles, et en repassant dans $\mathcal{R}$, ces droites ont pour équations $y = -x \pm 1$.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 :

1. $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.
2. Le polynôme caractéristique de M est

$$\chi_M(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} \lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2 - \frac{1}{4})$$
$$(1-\lambda)\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)$$

   et les valeurs propres de M sont biens 1, $\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$.
3. D'après les lignes des valeurs propres trouvées ci dessus, on obtient

$$\sigma(\mathcal{Q}) = (2,1), \quad \mathrm{rg}(\mathcal{Q}) = 3$$

   et $\mathcal{Q}$ est un hyperboloïde.
4. Pour obtenir un repère dans lequel l'équation de $\mathcal{Q}$ est réduit et reprend pour coefficients les valeurs propres de M, il faut déterminer les vecteurs propres de M :

   - $\underline{\lambda = \frac{1}{2}}$:

$$MX = \frac{1}{2}X \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & \frac{1}{2}x \\ -\frac{1}{2}z & = & \frac{1}{2}y \\ -\frac{1}{2}y & = & \frac{1}{2}z \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y & = & -z \end{array} \right.$$

   $E_{\frac{1}{2}}$ est donc la droite de l'espace engendrée par le vecteur $\overrightarrow{e_1} = \frac{\sqrt{2}}{2}(0,1,-1)$.

   - $\underline{\lambda = 1}$:

$$MX = X \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & x \\ -\frac{1}{2}z & = & y \\ -\frac{1}{2}y & = & z \end{array} \right. \Leftrightarrow y = z = 0.$$

   E_1 est donc la droite de l'espace engendrée par le vecteur $\overrightarrow{e_2} = (1,0,0)$.

   - $\underline{\lambda = -\frac{1}{2}}$:

$$MX = -\frac{1}{2}X \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -\frac{1}{2}x \\ -\frac{1}{2}z & = & -\frac{1}{2}y \\ -\frac{1}{2}y & = & -\frac{1}{2}z \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y & = & z \end{array} \right.$$

   $E_{-\frac{1}{2}}$ est donc la droite de l'espace engendrée par le vecteur $\overrightarrow{e_3} = \frac{\sqrt{2}}{2}(0,1,1)$.

   Dans le repère $\mathcal{R}' = (O\,;\,\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$, l'équation de $\mathcal{Q}$ a bien la forme voulue.

5. (a) L'équation de $\mathcal{H}_\alpha$ est

$$\frac{1}{2}X^2 + \alpha^2 - \frac{1}{2}Z^2 = 1 \iff \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}Z^2 = 1 - \alpha^2.$$

On reconnaît une forme quadratique en deux variables, de signature $(1,1)$. On a donc bien une hyperbole dans le plan (XOZ). D'autre part,

- Si $\alpha < 1$, en divisant par $1 - \alpha^2$, on obtient une équation de la forme

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Z^2}{b^2} = 1.$$

Il s'agit donc d'une hyperbole dont l'axe focal est l'axe (OX).

- Si $\alpha > 1$, en divisant par $\alpha^2 - 1$, on obtient une équation de la forme

$$\frac{Z^2}{a'^2} - \frac{X^2}{b'^2} = 1.$$

Il s'agit donc d'une hyperbole dont l'axe focal est l'axe (OZ).

(b) La courbe $\mathcal{H}_1$ a pour équation

$$\frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}Z^2 = 0 \iff X = \pm Z.$$

On reconnaît un couple de droite orthogonales entre elles.

(c)

```
Dessin = implicit_plot(X^2 - Z^2 - 2, (X, -2, 2), (Z, -2, 2))
for a in srange(0.5, 3.5, 0.5) :
    Dessin = Dessin + implicit_plot(X^2 - Z^2 - 2 - 2 * a, (X, -2, 2), (Z, -2, 2))
Dessin.show()
```

⋆ ⋆
⋆