CONTRÔLE CONTINU

Coniques, quadriques, formes quadratiques

Durée : 1h30 *Les calculatrices sont autorisées.*

Tous les exercices sont indépendants.
Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation.

Exercice 1 Répondre par VRAI ou FAUX aux questions suivantes (on justifiera rapidement les réponses).

1. La signature d'une forme quadratique quelconque est donnée par le signe des coefficients de ses termes carrés.
2. Toute conique admet un centre de symétrie.
3. Toute conique admet un axe de symétrie.
4. La méthode de Gauss donne les directions privilégiées d'une quadrique.
5. La méthode de Gauss donne la signature d'une forme quadratique.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 On se place dans le plan muni d'un repère $\mathcal{R} = (O\,;\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ orthonormé et l'on note $\mathcal{C}$ la conique d'équation

$$(E)\ :\ 5x^2 - 4xy + 8y^2 - 6x - 12y + 8 = 0$$

1. Isoler la partie quadratique de (E) et donner sa matrice A.
2. Montrer que les valeurs propres de A sont
$$\lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = 9$$
3. Quelle est la nature de $\mathcal{C}$? Justifier.
4. Construire un repère $\mathcal{R}'$ orthonormé du plan fait de vecteurs propres de A.
5. Donner l'équation de $\mathcal{C}$ dans le repère $\mathcal{R}' = (O\,;\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.
6. Montrer que le point $\Omega = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$ est le centre de $\mathcal{C}$.
7. Donner l'équation de $\mathcal{C}$ dans le repère $\mathcal{R}_0 = (\Omega\,;\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.
8. Donner les coordonnées dans $\mathcal{R}$ des sommets de $\mathcal{C}$.
9. Tracer une esquisse de $\mathcal{C}$ dans le repère ci-joint (on fera apparaître les axes principaux et les sommets de $\mathcal{C}$).

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

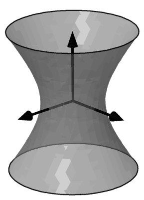
Exercice 3 On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (\mathcal{O}\,;\,\overrightarrow{i}\,,\,\overrightarrow{j}\,,\,\overrightarrow{k}\,)$. Dans ce repère, on note $\mathcal{S}$ la surface d'équation

$$3x^2 - 4xy + 3y^2 - 3z^2 = 1$$

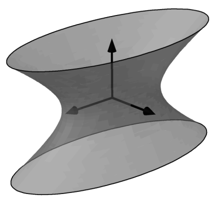
1. Montrer que le centre $\mathcal{O}$ de $\mathcal{R}$ est le centre de symétrie de $\mathcal{S}$ et que le plan $(x\mathcal{O}y)$ est un plan de symétrie de $\mathcal{S}$.
2. Donner la matrice associée à $q(x, y, z) = 3x^2 - 4xy + 3y^2 - 3z^2$.
3. Déterminer les valeurs propres de A et donner la signature de q.
4. Montrer que les vecteurs

$$\overrightarrow{e_1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}, \quad \overrightarrow{e_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}, \quad \overrightarrow{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$$

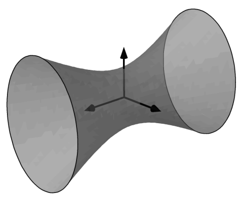
   forment une base orthonormée de l'espace constitué de vecteurs propres de A.
5. Donner sans calcul l'équation de $\mathcal{S}$ dans le repère $\mathcal{R}' = (\mathcal{O}\,;\,\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$.
6. Parmi les surfaces ci-dessous, laquelle correspond à $\mathcal{S}$ (dans chacun des dessins ci-dessous, le vecteur $\overrightarrow{e_3}$ est le vecteur vertical) ? Justifier.



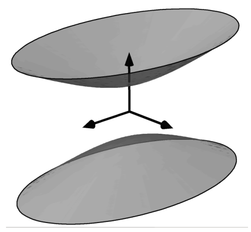
S_1



S_2



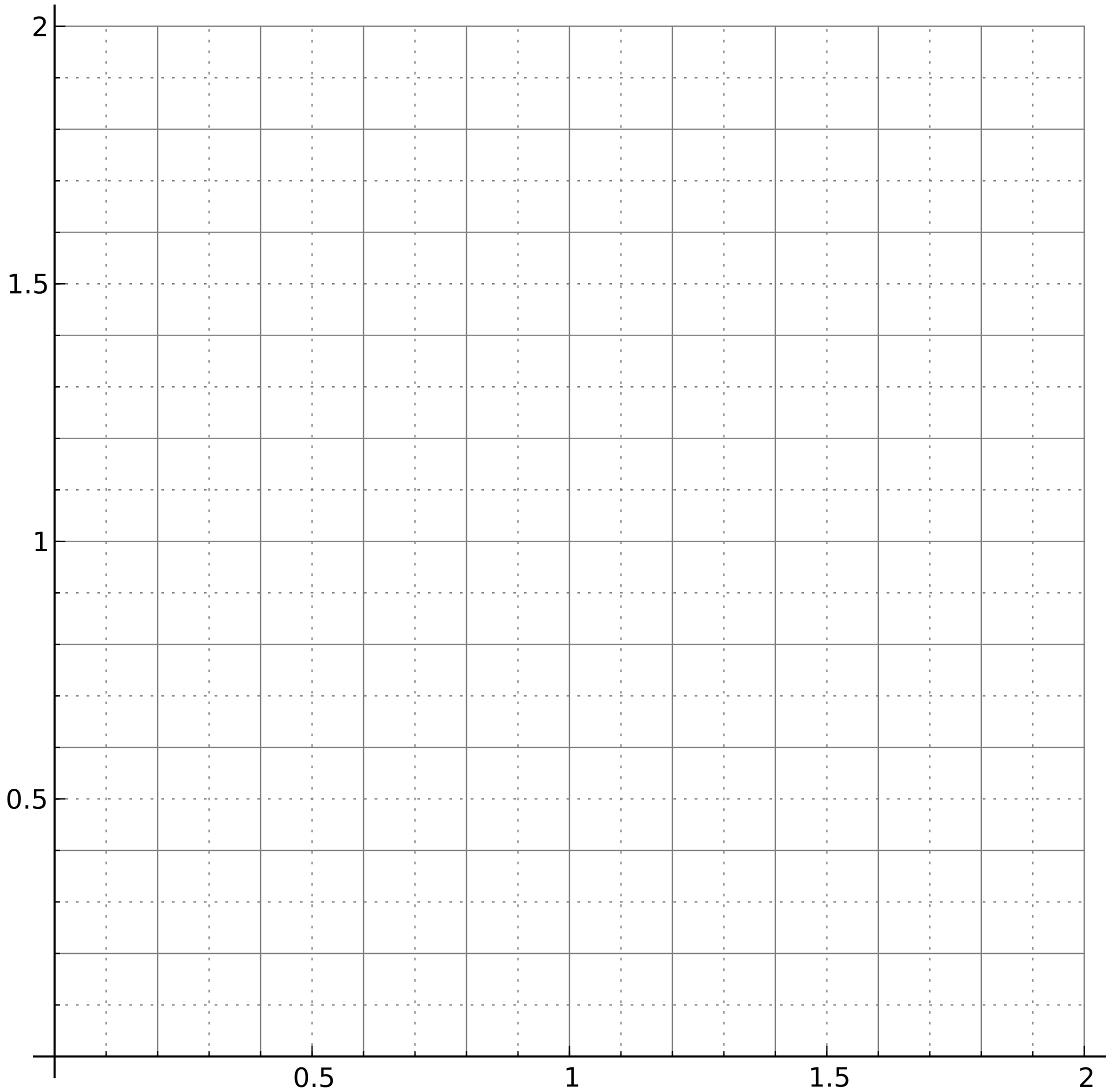
S_3



S_4

⋆ ⋆
⋆

NOM : .... Prénom : ....



CORRECTION

Exercice 1 :

1. FAUX. La signature est obtenue une fois que la forme quadratique est réduite.
2. FAUX. Les paraboles n'ont pas de centre de symétrie.
3. VRAI. C'est l'axe focal.
4. FAUX. La base obtenue par la méthode de Gauss n'est pas orthonormée.
5. VRAI. La méthode de Gauss fait disparaître les termes rectangles. Elle réduit donc la forme quadratique.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 :

1. $q(x,y) = 5x^2 - 4xy + 8y^2$ et $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$.
2. $$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 \\ -2 & 8-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (5-\lambda)(8-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 13\lambda + 36 \end{aligned}$$

   On peut alors vérifier rapidement que $\chi_A(4) = \chi_A(9) = 0$. Le polynôme $\chi_A(\lambda)$ étant de degré 2, 4 et 9 sont ses seules racines.
3. Les deux valeurs propres de A étant positives, la signature de q est $\sigma(q) = (2,0)$. $\mathcal{C}$ est donc une ellipse.
4. • $\underline{E_4}$:

   $$AX = 4X \iff \left\{ \begin{array}{rcl} 5x - 2y & = & 4x \\ -2x + 8y & = & 4y \end{array} \right. \iff x - 2y = 0$$

   Le sous espace propre E_4 est donc la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x$, dont un vecteur normé est $\overrightarrow{e_1} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$.

   • $\underline{E_9}$:

   $$AX = 9X \iff \left\{ \begin{array}{rcl} 5x - 2y & = & 9x \\ -2x + 8y & = & 9y \end{array} \right. \iff 2x + y = 0$$

   Le sous espace propre E_9 est donc la droite d'équation $y = -2x$, dont un vecteur normé est $\overrightarrow{e_2} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$.

   On vérifie rapidement que les vecteurs $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$ sont orthogonaux. Ils forment donc la BON cherchée.

5. La matrice de passage de $\mathcal{R}$ à $\mathcal{R}'$ est $P = \frac{\sqrt{5}}{5}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Ainsi, si l'on note $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'}$ les coordonnées dans $\mathcal{R}'$ d'un point quelconque du plan, on a

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} x &= \frac{\sqrt{5}}{5}(2x'+y') \\ y &= \frac{\sqrt{5}}{5}(x'-2y') \end{cases}$$

En introduisant ces expressions dans le polynôme $p(x,y) = 5x^2 - 4xy + 8y^2 - 6x - 12y + 8$, on obtient :

$$\begin{aligned} p(x,y) &= p\left(\frac{\sqrt{5}}{5}(2x'+y'), \frac{\sqrt{5}}{5}(x'-2y')\right) \\ &= 4x'^2 + 9y'^2 - 6\frac{\sqrt{5}}{5}(2x'+y') - 12\frac{\sqrt{5}}{5}(x'-2y') + 8 \\ &= 4x'^2 + 9y'^2 - 24\frac{\sqrt{5}}{5}x' + 18\frac{\sqrt{5}}{5}y' + 8 = \tilde{p}(x',y') \end{aligned}$$

et l'équation de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{R}'$ est $\tilde{p}(x',y') = 0$.
Note : pour la partie quadratique, les calculs peuvent être évités car le terme rectangle disparaît et les coefficients des termes carrés correspondent aux valeurs propres.

6. Pour montrer que Ω est bien le centre de $\mathcal{C}$, on y déplace le repère $\mathcal{R}'$. Pour cela, on commence par calculer les coordonnées de Ω dans le repère $\mathcal{R}'$. Or d'après la formule de changement de repère, si l'on note $\begin{pmatrix} x_0' \\ y_0' \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'}$ les coordonnées de Ω dans $\mathcal{R}'$, on a

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = P \times \begin{pmatrix} x_0' \\ y_0' \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_0' \\ y_0' \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

D'autre part, P étant une matrice de passage entre deux repères orthonormés, elle vérifie $P^{-1} = {}^tP$. D'où

$$\begin{pmatrix} x_0' \\ y_0' \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{5}}{5}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_0' &= 3\frac{\sqrt{5}}{5} \\ y_0' &= -\frac{\sqrt{5}}{5} \end{cases}$$

En notant alors $\mathcal{R}_0 = (\Omega : \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, l'équation de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{R}_0$ s'obtient en effectuant le changement de variables

$$\begin{cases} X &= x' - 3\frac{\sqrt{5}}{5} \\ Y &= y' + \frac{\sqrt{5}}{5} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x' &= X + 3\frac{\sqrt{5}}{5} \\ y' &= Y - \frac{\sqrt{5}}{5} \end{cases}$$

dans $\tilde{p}(x', y')$:

$$\begin{aligned}\tilde{p}\left(X+3\frac{\sqrt{5}}{5}, Y-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) =&4\left(X+3\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2+9\left(Y-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2\\ &-24\frac{\sqrt{5}}{5}\left(X+3\frac{\sqrt{5}}{5}\right)+18\frac{\sqrt{5}}{5}\left(Y-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)+8\\ =&4\left(X^2+6\frac{\sqrt{5}}{5}X+\frac{9}{5}\right)+9\left(Y^2-2\frac{\sqrt{5}}{5}Y+\frac{1}{5}\right)\\ &-24\frac{\sqrt{5}}{5}\left(X+3\frac{\sqrt{5}}{5}\right)+18\frac{\sqrt{5}}{5}\left(Y-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)+8\\ =&4X^2+9Y^2-1\end{aligned}$$

L'équation de $\mathcal{C}$ dans le repère $\mathcal{R}_0$ est donc $4X^2+9Y^2=1$. Cette équation étant invariante par changement $(X,Y) \rightsquigarrow (-X,-Y)$, on en déduire que le centre Ω du repère $\mathcal{R}_0$ est bien le centre de symétrie de $\mathcal{C}$.

7. Le repère $\mathcal{R}_0$ étant orthonormé, l'équation ci-dessus donne directement les coordonnées des sommets de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{R}_0$:

$$S_1=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ 0\end{pmatrix}_{\mathcal{R}_0},\quad S_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ 0\end{pmatrix}_{\mathcal{R}_0},\quad S_3=\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix}_{\mathcal{R}_0},\quad S_4=\begin{pmatrix}0\\ -\frac{1}{3}\end{pmatrix}_{\mathcal{R}_0}$$

Pour obtenir ces coordonnées dans $\mathcal{R}$, on passe d'abord dans $\mathcal{R}'$:

$$S_1=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}+3\frac{\sqrt{5}}{5}\\ -\frac{\sqrt{5}}{5}\end{pmatrix}_{\mathcal{R}'},\quad S_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}+3\frac{\sqrt{5}}{5}\\ -\frac{\sqrt{5}}{5}\end{pmatrix}_{\mathcal{R}'},\quad S_3=\begin{pmatrix}3\frac{\sqrt{5}}{5}\\ \frac{1}{3}-\frac{\sqrt{5}}{5}\end{pmatrix}_{\mathcal{R}'},\quad S_4=\begin{pmatrix}3\frac{\sqrt{5}}{5}\\ -\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{5}}{5}\end{pmatrix}_{\mathcal{R}'}$$

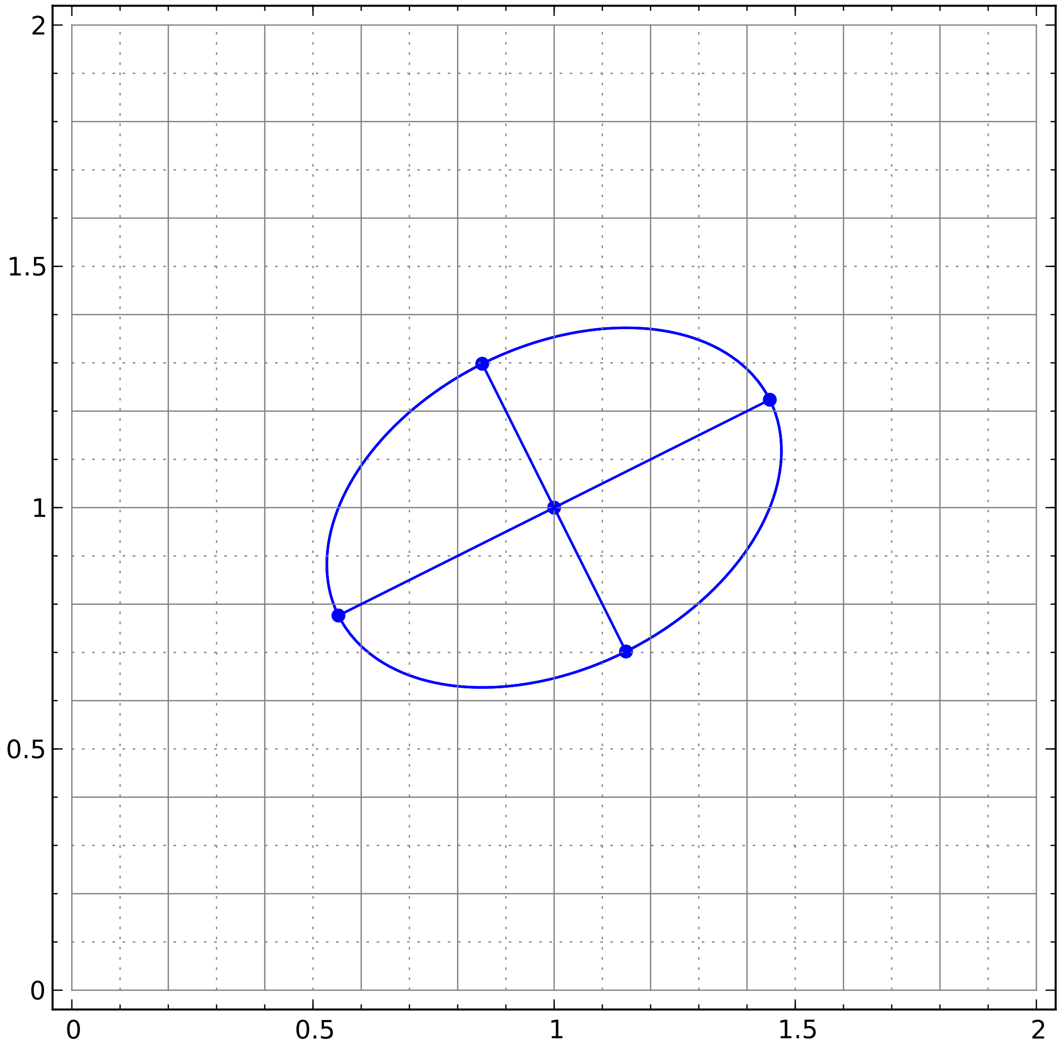
À l'aide de la matrice P, on obtient alors les coordonnées cherchées via la formule $\begin{pmatrix}x_i\\ y_i\end{pmatrix}=P\left(\ x_i', y_i'\ \right)$:

$$\begin{aligned}S_1&=\frac{\sqrt{5}}{5}\begin{pmatrix}2&1\\ 1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}+3\frac{\sqrt{5}}{5}\\ -\frac{\sqrt{5}}{5}\end{pmatrix}=\frac{\sqrt{5}}{5}\begin{pmatrix}2&1\\ 1&-2\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\frac{\sqrt{5}}{5}\\ -\frac{\sqrt{5}}{5}\end{pmatrix}\right)\\ &=\frac{\sqrt{5}}{5}\begin{pmatrix}-1\\ 0\end{pmatrix}+\frac{1}{5}\begin{pmatrix}2\\ 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-\frac{\sqrt{5}}{5}\\ 1-\frac{\sqrt{5}}{10}\end{pmatrix}_{\mathcal{R}}\end{aligned}$$

De même, on trouve

$$S_2=\begin{pmatrix}1+\frac{\sqrt{5}}{5}\\ 1+\frac{\sqrt{5}}{10}\end{pmatrix}_{\mathcal{R}},\quad S_3=\begin{pmatrix}1+\frac{\sqrt{5}}{15}\\ 1-2\frac{\sqrt{5}}{15}\end{pmatrix}_{\mathcal{R}},\quad S_4=\begin{pmatrix}1-\frac{\sqrt{5}}{5}\\ 1+2\frac{\sqrt{5}}{15}\end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$$

8. On obtient le dessin suivant :



⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 :

1. Soit $M = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$ un point de $\mathcal{S}$. Son symétrique par rapport au centre $\mathcal{O}$ du repère est $M' = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$. Or l'équation de $\mathcal{S}$ étant invariante par le changement $(x, y, z) \rightsquigarrow (-x, -y, -z)$, si M est sur $\mathcal{S}$, M' est également sur $\mathcal{S}$. Cela montre la symétrie par rapport au centre du repère.

   De même, si $M = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est un point de $\mathcal{S}$, son symétrique par rapport au plan $(x\mathcal{O}y)$ est $M'' = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -z \end{pmatrix}$. Là encore, la symétrie de $\mathcal{S}$ par rapport à ce plan est donnée par l'invariance de l'équation par le changement $(x, y, z) \rightsquigarrow (x, y, -z)$ (seul z^2 apparaissant dans cette équation).

2.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

3.

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (-3-\lambda)\left((3-\lambda)^2 - 4\right) = -(3+\lambda)(1-\lambda)(5-\lambda) \end{aligned}$$

Les valeurs propres de A sont donc $-3, 1$ et 5. La signature de q est donc $\sigma(q) = (2, 1)$.

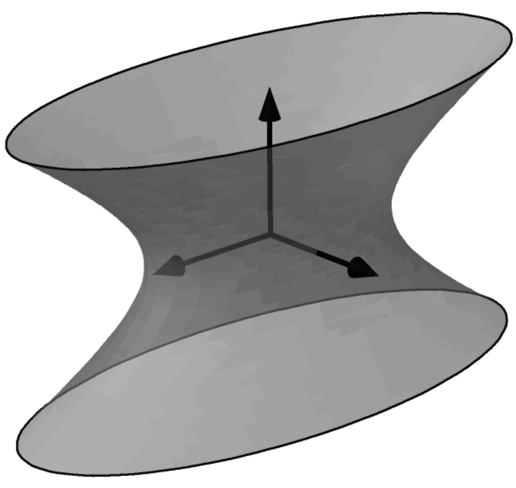
4. On obtient ces trois vecteurs en résolvant les trois systèmes $AX = \lambda X$ associés aux trois valeurs propres trouvées ci-dessus.

   Note : il est également possible de répondre à la question en calculant les produits $A \times e_i$ pour chacun des e_i proposés.

5.

$$E_{red} \,:\, X^2 + 5Y^2 - 3Z^2 = 1$$

6. La signature de q étant $(2, 1)$ et l'équation étant de la forme $q(x, y, z) = 1$, la surface $\mathcal{S}$ est un hyperboloïde à une nappe. Par ailleurs, la valeur propre négative correspondant à $\overrightarrow{e_3}$, l'axe de la "cheminée" de $\mathcal{S}$ est vertical. Enfin, les deux valeurs propres positives étant différentes, la section horizontale de $\mathcal{S}$ est une ellipse non circulaire. Il s'agit donc de la surface $\mathcal{S}_2$.



⋆ ⋆
⋆