CONTRÔLE CONTINU

Coniques, quadriques, formes quadratiques

Durée : 1h30 *Les calculatrices sont autorisées.*

Tous les exercices sont indépendants.
Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation.

Exercice 1 Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (\mathcal{O}\,;\, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on note $\mathcal{C}$ la conique d'équation

$$5x^2 + 8y^2 + 4xy + 16x - 8y + 16 = 0$$

1. Isoler la partie quadratique $q(x, y)$ de l'équation (E) et donner sa matrice A_q.
2. Montrer que les valeurs propres de A_q sont $\lambda_1 = 4$ et $\lambda_2 = 9$.
3. Donner la nature de $\mathcal{C}$ (justifier).
4. Déterminer les sous espaces propres de A_q et les placer dans le repère ci-joint.
5. Déterminer un repère $\mathcal{R}' = (\mathcal{O}\,;\, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ orthonormé du plan fait de vecteurs propres de A_q et donner la matrice de passage de $\mathcal{R}$ à $\mathcal{R}'$.
6. Déterminer l'équation de $\mathcal{C}$ dans le repère $\mathcal{R}'$.
7. Montrer que le point $\Omega = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$ est le centre de $\mathcal{C}$ et déterminer l'équation de $\mathcal{C}$ dans le repère $\mathcal{R}'' = (\Omega\,;\, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$
8. Tracer une esquisse de $\mathcal{C}$ dans le repère ci-joint. On placera également le centre, les axes principaux et les sommets de $\mathcal{C}$,

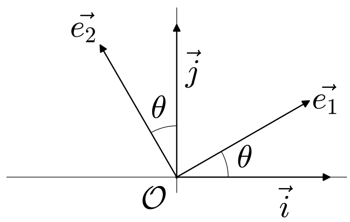
⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 Soient $\mathcal{R}_0 = (\mathcal{O}\,;\, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ un repère orthonormé du plan et $\alpha \geqslant 0$. On note $\mathcal{C}_\alpha$ la conique du plan dont l'équation dans $\mathcal{R}_0$ est

$$x^2 + 2\alpha xy + y^2 = 1$$

1. À l'aide de la méthode de Gauss, déterminer, en fonction de α, la nature de la conique $\mathcal{C}_\alpha$.
2. On suppose ici que $\underline{\alpha \notin \{0, 1\}}$.

Pour $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on note $\mathcal{R}_\theta = (\mathcal{O}\,;\, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ le repère du plan obtenu par une rotation d'angle θ du repère $\mathcal{R}_0$ (c.f. dessin ci-contre).



(a) Montrer que la matrice de passage de $\mathcal{R}_0$ à $\mathcal{R}_\theta$ est

$$P_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

(b) Déterminer l'équation de $\mathcal{C}_\alpha$ dans $\mathcal{R}_\theta$ (on pourra noter (X, Y) les coordonnées dans $\mathcal{R}_\theta$).

(c) Déterminer l'angle $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ tel que l'équation de $\mathcal{C}_\alpha$ dans $\mathcal{R}_{\theta_0}$ ne contienne plus de terme rectangle et donner cette équation (on rappelle que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a $\cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos(2\theta)$).

(d) Donner, en fonction de α, les coordonnées dans $\mathcal{R}_{\theta_0}$ puis dans $\mathcal{R}_0$ des sommets principaux de $\mathcal{C}_\alpha$. On pourra distinguer les cas $\alpha > 1$ et $0 < \alpha < 1$.

3. Décrire la courbe $\mathcal{C}_0$.
4. Montrer que la courbe $\mathcal{C}_1$ est la réunion de deux droites parallèles dont on précisera les équations dans $\mathcal{R}_0$.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer l'unique forme quadratique $q(x, y, z)$ dont A est la matrice.
2. Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R}$, on note $\mathcal{Q}$ la quadrique dont l'équation dans $\mathcal{R}$ est $q(x, y, z) = 1$.

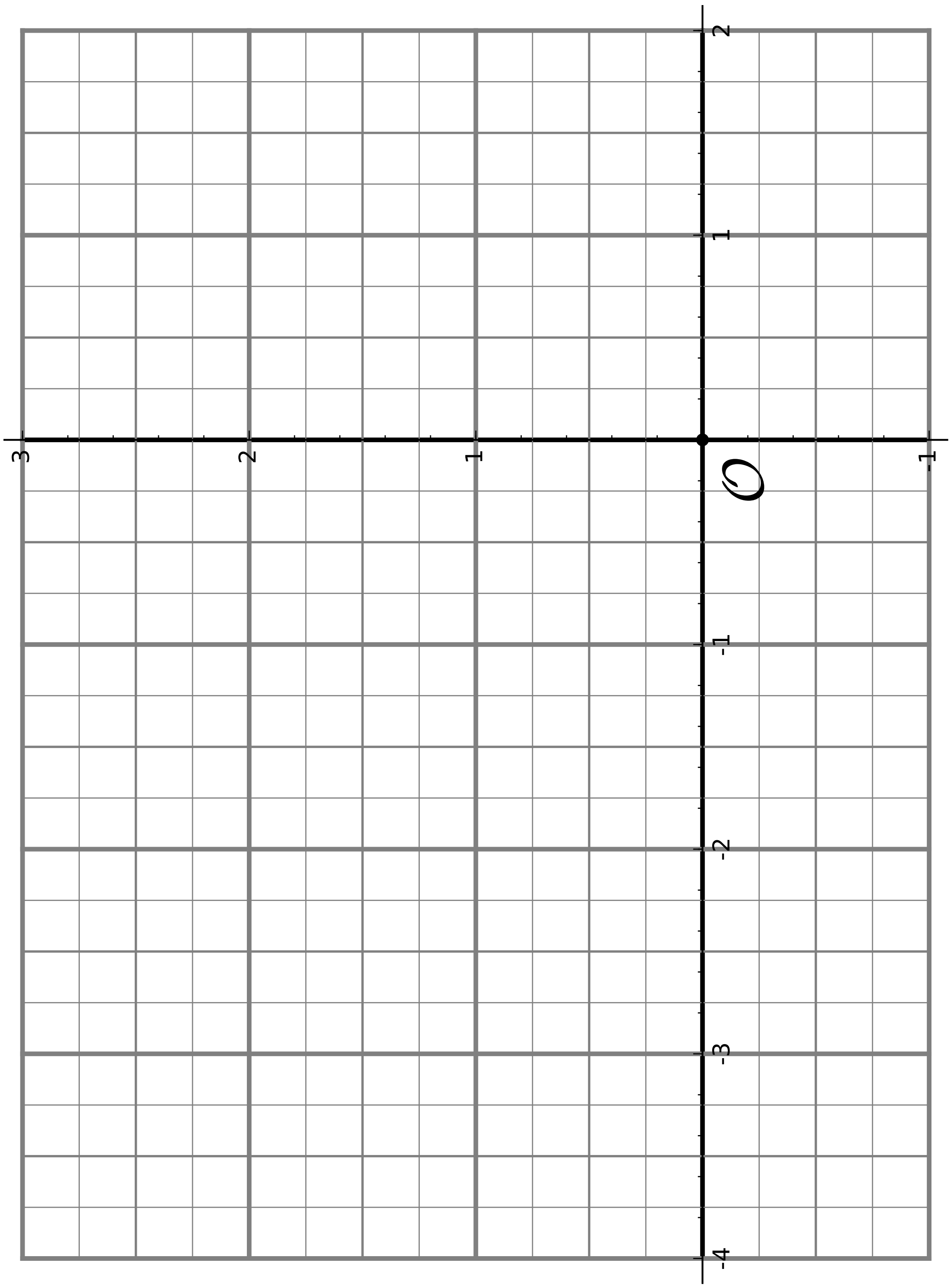
(a) Montrer que l'intersection de $\mathcal{Q}$ avec le plan horizontal d'équation $z = 0$ est une ellipse $\mathcal{E}_0$ dont on précisera les coordonnées du centre dans le repère $\mathcal{R}$ ainsi que les grandeurs caractéristiques a et b.

(b) Montrer que pour tout $h \in \mathbb{R}$, l'intersection de $\mathcal{Q}$ avec le plan d'équation $z = h$ une ellipse $\mathcal{E}_h$ ayant les mêmes dimensions que $\mathcal{E}_0$. On précisera là encore les coordonnées du centre de $\mathcal{E}_h$ dans le repère $\mathcal{R}$.

(c) Décrire la surface $\mathcal{Q}$.

⋆ ⋆
⋆

NOM : .... Prénom : ....



CORRECTION

Exercice 1 :

1.
$$q(x,y) = 5x^2 + 8y^2 + 4xy \qquad \text{et} \qquad A_q = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$$

2.
$$\begin{aligned}\det(A_q - \lambda I_2) &= \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 8-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(8-\lambda) - 4 \\ &= \lambda^2 - 13\lambda + 36\end{aligned}$$

Le discriminant de ce polynôme est $\Delta = 13^2 - 4 \times 36 = 25$ et les valeurs propres de A_q sont bien
$$\lambda_1 = \frac{13-\sqrt{25}}{2} = 4 \qquad \text{et} \qquad \lambda_1 = \frac{13+\sqrt{25}}{2} = 9$$

3. Les deux valeurs propres de A_q étant positives, on a $\sigma(q) = (2,0)$. La conique $\mathcal{C}$ est donc une ellipse.

4. • $\underline{E_4}$: $AX = 4X \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 5x + 2y &=& 4x \\ 2x + 8y &=& 4y \end{array}\right. \Leftrightarrow \boxed{y = -\frac{1}{2}x}$

   • $\underline{E_9}$: $AX = 9X \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 5x + 2y &=& 9x \\ 2x + 8y &=& 9y \end{array}\right. \Leftrightarrow \boxed{y = 2x}$

5. On construit les vecteurs $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$ en normant deux vecteurs $\overrightarrow{\varepsilon_1}$ et $\overrightarrow{\varepsilon_2}$ tirés des deux droites déterminées à la question précédente. Ainsi, on a (par exemple) :
$$\overrightarrow{\varepsilon_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{e_1} = \frac{\overrightarrow{\varepsilon_1}}{||\overrightarrow{\varepsilon_1}||} = \frac{\sqrt{5}}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$$
$$\overrightarrow{\varepsilon_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{e_2} = \frac{\overrightarrow{\varepsilon_2}}{||\overrightarrow{\varepsilon_2}||} = \frac{\sqrt{5}}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$$
La matrice de passage de $\mathcal{R}$ à $\mathcal{R}'$ est alors
$$P = \frac{\sqrt{5}}{5}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

6. En notant $M = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'}$, on a
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \times \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x &=& \frac{\sqrt{5}}{5}(2X+Y) \\ \\ y &=& \frac{\sqrt{5}}{5}(-X+2Y) \end{array}\right.$$
Ainsi,
$$\begin{aligned} p(x,y) =& 5x^2 + 8y^2 + 4xy + 16x - 8y + 16 \\ =& (2X+Y)^2 + \frac{8}{5}(-X+2Y)^2 + \frac{4}{5}(2X+Y)(-X+2Y) \\ &+ \frac{16\sqrt{5}}{5}(2X+Y) - \frac{8\sqrt{5}}{5}(-X+2Y) + 16 \\ =& 4X^2 + 9Y^2 + 8\sqrt{5}X + 16 = P(X,Y) \end{aligned}$$

et l'équation de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{R}'$ est alors $P(X,Y)=0$.

7. On peut déterminer le centre Ω de $\mathcal{C}$ en éliminant la partie linéaire de l'équation de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{R}'$:

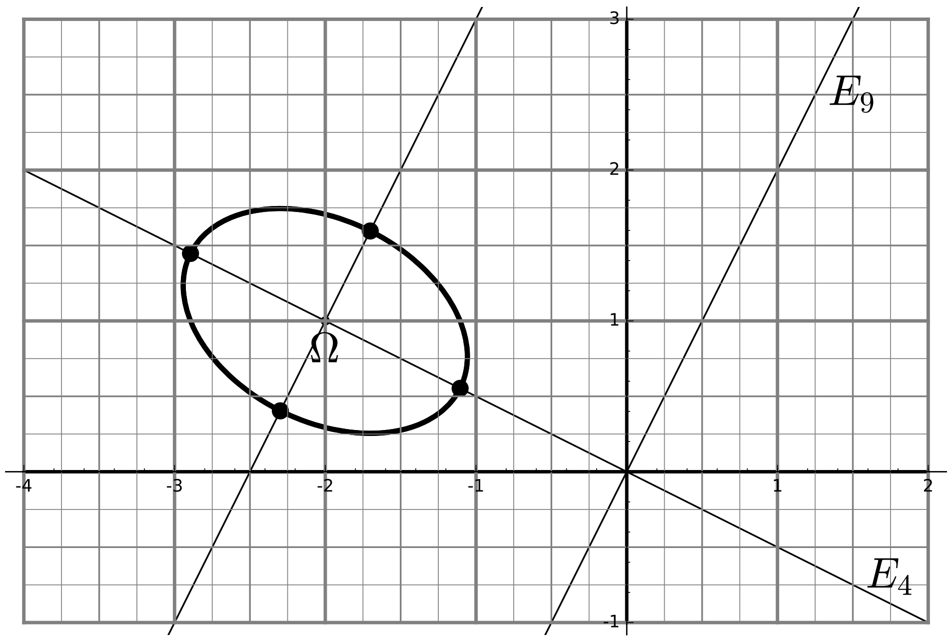
$$\begin{aligned} P(X,Y) &= 4X^2+9Y^2+8\sqrt{5}X+16 = 4(X^2+2\sqrt{5}X)+9Y^2+16 \\ &= 4\left[(X-\sqrt{5})^2-5\right]+9Y^2+16 \\ &= 4(X-\sqrt{5})^2+Y^2-4 \\ &= 4\tilde{x}^2+9\tilde{y}^2-4 \end{aligned}$$

avec $\left\{\begin{array}{lcl} \tilde{x} &=& X-\sqrt{5} \\ \tilde{y} &=& Y \end{array}\right.$. Or ce changement de variable correspond à la translation du repère $\mathcal{R}'$ au point $\begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'}$ dont les coordonnées dans $\mathcal{R}$ sont $P\times\begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$.
On reconnaît le point Ω.
D'autre part, l'équation de $\mathcal{C}$ dans le repère $\mathcal{R}''$ est alors

$$4\tilde{x}^2+9\tilde{y}^2-4=0 \iff \boxed{\tilde{x}^2+\frac{9}{4}\tilde{y}^2=1}$$

Cette équation n'ayant plus de terme linéaire, le centre du repère associé est bien le centre de symétrie de $\mathcal{C}$.

8.



⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 :

1. La mise sous forme canonique de la forme quadratique $q(x,y)=x^2+2\alpha xy+y^2$ donne :

$$q(x,y)=(x-\alpha y)^2+(1-\alpha)^2y^2$$

Ainsi

- si $\alpha < 1$, $\sigma(q) = (2,0)$ et $\mathcal{C}_\alpha$ est une ellipse,
- si $\alpha = 1$, $\sigma(q) = (1,0)$ et $\mathcal{C}_\alpha$ est une parabole,
- si $\alpha > 1$, $\sigma(q) = (2,0)$ et $\mathcal{C}_\alpha$ est une hyperbole.

2. (a) En projetant les vecteurs $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$ sur les axes du repère $\mathcal{R}_0$, on obtient :

$$\begin{array}{rcccl} \overrightarrow{e_1} & = & \cos\theta\,\overrightarrow{i} + \sin\theta\,\overrightarrow{j} & = & \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_0} \\ \overrightarrow{e_2} & = & -\sin\theta\,\overrightarrow{i} + \cos\theta\,\overrightarrow{j} & = & \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_0} \end{array}$$

On retrouve ici les colonnes de la matrice P_θ.

(b) Si $M = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_0} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_\theta}$, on a

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P_\theta \times \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & \cos\theta X - \sin\theta Y \\ y & = & \sin\theta X + \cos\theta Y \end{array} \right.$$

D'où

$$\begin{aligned} x^2 + 2\alpha xy + y^2 = 1 \Longleftrightarrow & (\cos\theta X - \sin\theta Y)^2 \\ & + 2\alpha(\cos\theta X - \sin\theta Y)(\sin\theta X + \cos\theta Y) \\ & + (\sin\theta X + \cos\theta Y)^2 = 1 \\ \\ \Longleftrightarrow & \cos^2\theta X^2 \cancel{-2\cos\theta\sin\theta XY} + \sin\theta Y^2 \\ & + 2\alpha(\cos\theta\sin\theta X^2 + (\cos^2\theta - \sin^2\theta)XY - \sin\theta\cos\theta Y^2) \\ & + \sin^2\theta X^2 \cancel{+2\sin\theta\cos\theta XY} + \cos^2\theta Y^2 = 1 \\ \\ \Longleftrightarrow & \boxed{(1 + \alpha\sin(2\theta))X^2 + (1 - \alpha\sin(2\theta))Y^2 + \alpha\cos(2\theta)XY = 1} \end{aligned}$$

(c) Puisque $\alpha \neq 0$, pour que l'équation ci-dessus n'admette plus de terme rectangle, on doit choisir θ_0 tel que $\cos(2\theta_0) = 0$, soit $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$. L'équation de $\mathcal{C}_\alpha$ dans le repère $\mathcal{R}_{\frac{\pi}{4}}$ associé est alors

$$(1 + \alpha)X^2 + (1 - \alpha)Y^2 = 1$$

(d) - Si $\alpha > 1$, alors $1 - \alpha < 0$. L'axe focal de $\mathcal{C}_\alpha$ est alors l'axe $(\mathcal{O}X)$. Les sommets de $\mathcal{C}_\alpha$ sont alors

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+\alpha}} \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_{\frac{\pi}{4}}} \quad \text{et} \quad S' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{1+\alpha}} \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_{\frac{\pi}{4}}}$$

On obtient les coordonnées de ces points dans $\mathcal{R}_0$ en multipliant ces coordonnées par la matrice $P_{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$:

$$S = \frac{1}{\sqrt{2(1+\alpha)}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_0} \quad \text{et} \quad S' = -\frac{1}{\sqrt{2(1+\alpha)}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_0}$$

- Si $0 < \alpha < 1$, alors $0 < 1-\alpha < 1+\alpha$. L'axe focal de $\mathcal{C}_\alpha$ est alors l'axe $(\mathcal{O}Y)$. Les sommets de $\mathcal{C}_\alpha$ sont alors

$$S = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{1-\alpha}} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_{\frac{\pi}{4}}} = -\frac{1}{\sqrt{2(1-\alpha)}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_0}$$

et

$$S' = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{1-\alpha}} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_{\frac{\pi}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{2(1-\alpha)}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_0}$$

3. $\mathcal{C}_0$ est la courbe d'équation $x^2 + y^2 = 1$. On reconnaît le cercle trigonométrique.
4. L'équation de la courbe $\mathcal{C}_1$ dans $\mathcal{R}_0$ est

$$x^2 + 2xy + y^2 = 1 \iff (x+y)^2 = 1 \iff \boxed{x+y = 1 \text{ ou } x+y = -1}$$

On reconnaît deux droites de même pente $(= -1)$ donc parallèles.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 :

1. D'après les coefficients de la matrice A, on a

$$q(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + z^2 - 2yz$$

2. (a) En posant $z = 0$ dans l'équation $q(x, y, z) = 1$, on obtient

$$2x^2 + y^2 = 1$$

On reconnaît l'équation réduite d'une ellipse centrée au centre $(0, 0, 0)$ du repère $\mathcal{R}$ et dont les grandeurs caractéristiques sont

$$a = 1 \qquad \text{et} \qquad b = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(b) Soit $h \in \mathbb{R}$. En posant $z = h$ dans l'équation de $\mathcal{Q}$, on a

$$2x^2 + y^2 + h^2 - 2yh = 1 \iff 2x^2 + (y-h)^2 = 1$$

On reconnaît ici l'équation d'une ellipse ayant les mêmes dimensions que $\mathcal{E}_0$, mais centrée au point $(0, h, h)$.

(c) Au vue de l'étude précédente, la surface $\mathcal{Q}$ semble être un cylindre de section elliptique et dont l'axe l'est pas vertical.

⋆ ⋆
⋆