CONTRÔLE CONTINU

Coniques, quadriques, formes quadratiques.

Durée : 1h30 *Les calculatrices sont autorisées.*

Tous les exercices sont indépendants.
Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation.

Exercice 1 Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (\mathcal{O}\,;\ \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on note $\mathcal{C}$ la conique d'équation

$$xy = 1$$

1. Montrer que $\mathcal{C}$ est une conique à centre. On précisera les coordonnées dans $\mathcal{R}$ de son centre de symétrie.
2. Donner la forme quadratique $q(x, y)$ associée à $\mathcal{C}$ et construire sa matrice A_q.
3. Déterminer les valeurs propres de A_q et en déduire la nature de $\mathcal{C}$.
4. Déterminer une matrice P inversible telle que ${}^tP = P^{-1}$ et telle que le produit

   $$D = P^{-1} \times A_q \times P$$

   soit une matrice triangulaire dont on précisera les coefficients diagonaux.
5. Donner sans calcul l'équation de $\mathcal{C}$ dans le repère $\mathcal{R}'$ défini par la matrice P.
6. Donner sans calcul l'équation dans $\mathcal{R}'$ de l'axe focal de $\mathcal{C}$.
7. Déterminer les coordonnées dans $\mathcal{C}$ des sommets puis des foyers de $\mathcal{C}$.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 Soient $\mathcal{R} = (\mathcal{O}\,;\ \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ un repère orthonormé du plan et $a \in \mathbb{R}$ un réel fixé. On note

$$q(x, y) = x^2 + 2axy + y^2$$

et $\mathcal{C}_a$ la conique dont l'équation dans $\mathcal{R}$ est

$$q(x, y) = 1 - a^2$$

1. Déterminer, en fonction de a, la nature de la conique $\mathcal{C}$.
2. Construire la matrice A_q de la forme quadratique q.
3. Déterminer les valeurs propres de A_q.
4. On suppose ici que $a \notin \{-1, 0, 1\}$.

(a) Montrer que les sous espaces propres de A_q sont deux droites du plan, indépendantes de a, dont on donnera les équations dans $\mathcal{R}$.

(b) Donner, en fonction de a, l'équation dans $\mathcal{R}$ de l'axe focal de $\mathcal{C}_a$.

5. Décrire la conique $\mathcal{C}_0$.
6. Décrire les coniques $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_{-1}$.

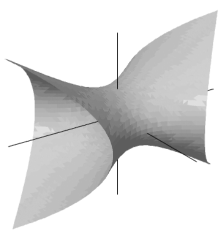
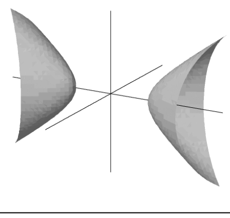
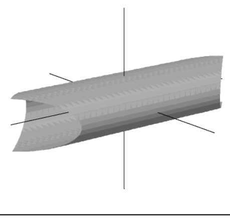
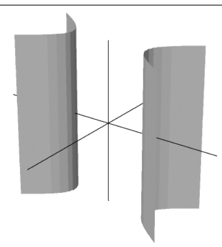
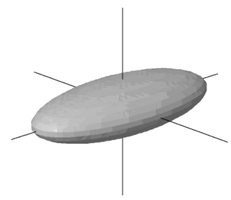
⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 Soient $a \in \mathbb{R}$ et

$$A = \begin{pmatrix} a & 1-a & 0 \\ 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & a+1 \end{pmatrix}$$

1. Donner la forme quadratique $q(x, y, z)$ associée à la matrice A.
2. Déterminer les valeurs propres de A.
3. Associer les cas et les surfaces d'équations $q(x, y, z) = 1$ ci-dessous. On justifiera rapidement les associations choisies.

Cas 1	Cas 2	Cas 3	Cas 4	Cas 5
$a < -1$	$a = -1$	$-1 < a < \frac{1}{2}$	$a = \frac{1}{2}$	$a > \frac{1}{2}$

Surface S_1	Surface S_2	Surface S_3	Surface S_4	Surface S_5
				

⋆ ⋆
⋆

CORRECTION

Exercice 1 :

1. L'équation de $\mathcal{C}$ ne contenant qu'un terme de degré 2, le centre $\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$ du repère $\mathcal{R}$ est le centre de symétrie de $\mathcal{C}$. $\mathcal{C}$ est donc une conique à centre.
2. On a $q(x, y) = xy$ et
$$A_q = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$
3. Les valeurs propres de A_q sont données par le polynôme caractéristique de A_q :
$$\begin{aligned} \chi_{A_q}(\lambda) &= \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 - \frac{1}{4} \\ &= \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$
Les valeurs propres de A_q sont donc
$$\mathrm{Spec}(A_q) = \left\{\pm\frac{1}{2}\right\}$$
Puisqu'elles sont de signes différents, la conique $\mathcal{C}$ est une hyperbole.

4. La matrice P cherchée est construite à partir des vecteurs propres de A_q. Ainsi,
   - $\underline{E_{\frac{1}{2}}}$:
$$A_q X = \tfrac{1}{2}.X \iff \left\{ \begin{array}{rcl} \frac{1}{2}y & = & \frac{1}{2}x \\ \frac{1}{2}x & = & \frac{1}{2}y \end{array} \right.$$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice ?? :

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice ?? :

⋆ ⋆
⋆