CONTRÔLE CONTINU

Coniques, quadriques, formes quadratiques.

Durée : 1h30 *Les calculatrices sont autorisées.*

Tous les exercices sont indépendants.
Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation.

Exercice 1 Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et associé aux coordonnées (x, y), on note $\mathcal{C}$ la conique d'équation

$$(E)\ :\ 3x^2 + 4xy - 12x + 16 = 0$$

1. Isoler la partie quadratique $q(x, y)$ de l'équation (E) et construire sa matrice A_q.
2. Déterminer la nature (parabole/ellipse/hyperbole) de $\mathcal{C}$.
3. À l'aide d'un changement de variable de la forme

$$\begin{cases} \tilde{x} &= x \\ \tilde{y} &= y - a \end{cases}$$

montrer que le centre Ω de $\mathcal{C}$ est un point de l'axe (Oy) dont on précisera l'ordonnée dans $\mathcal{R}$.

4. Donner une équation $\tilde{\mathcal{E}}$ de $\mathcal{C}$ dans le repère $\tilde{\mathcal{R}} = (\Omega, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et montrer que le changement de variable effectué à la question 3 ne modifie pas la forme quadratique de l'équation de $\mathcal{C}$.
5. Déterminer les axes de symétrie de $\mathcal{C}$. On donnera leurs équations respectives dans le repère $\tilde{\mathcal{R}}$ puis dans $\mathcal{R}$. On précisera également lequel des deux est l'axe focal de $\mathcal{C}$.
6. Déterminer les coordonnées des sommets de $\mathcal{C}$ dans $\tilde{\mathcal{R}}$ puis dans $\mathcal{R}$.
7. Déterminer les asymptotes de $\mathcal{C}$. On en donnera les équations dans le repère $\tilde{\mathcal{R}}$ puis dans $\mathcal{R}$.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 On se place de le plan muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

Pour $\lambda > 0$ fixé, on note $\mathcal{C}_\lambda$ la conique dont l'équation dans $\mathcal{R}$ est

$$(E_\lambda)\ :\ \frac{x^2}{\lambda} + y^2 - 2x = 0$$

1. Donner sans calcul le type (parabole/ellipse/hyperbole) de $\mathcal{C}_\lambda$.
2. Montrer que l'axe (Ox) est un axe de symétrie de $\mathcal{C}_\lambda$.

3. Déterminer, en fonction de λ, les coordonnées dans $\mathcal{R}$ des sommets de $\mathcal{C}_\lambda$ situés sur l'axe (Ox).
4. En déduire, en fonction de λ, les coordonnées du centre Ω de $\mathcal{C}_\lambda$.
5. Donner sans calcul l'équation dans $\mathcal{R}$ du second axe de symétrie de la conique $\mathcal{C}_\lambda$.
6. Déterminer les coordonnées dans $\mathcal{R}$ des deux autres sommets de $\mathcal{C}_\lambda$.
7. Montrer que lorsque λ parcourt $\mathbb{R}_*^+$, ces deux sommets parcourent une parabole du plan dont on donnera une équation dans $\mathcal{R}$.
8. Déterminer, selon les valeurs de λ, les coordonnées dans $\mathcal{R}$ des foyers de $\mathcal{C}_\lambda$.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

Pour $k \in \mathbb{R}$ fixé, on note $\mathcal{Q}$ la quadrique dont l'équation dans $\mathcal{C}$ est

$$4z^2 + 2xy - 2x = k$$

1. Isoler la forme quadratique $q(x, y, z)$ associée à l'équation de $\mathcal{Q}$ et donner sa matrice A_q.
2. Déterminer les valeurs propres de A_q et en déduire la signature de q.
3. Donner le type de la quadrique $\mathcal{Q}$.
4. À l'aide d'une diagonalisation de A_q, déterminer une équation réduite de $\mathcal{Q}$. On précisera le repère dans lequel cette équation est valable.
5. Décrire, en fonction de k, la surface $\mathcal{Q}$.

⋆ ⋆
⋆

CORRECTION

Exercice 1 :

1. $q(x,y) = 3x^2 + 4xy$ et $A_q = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.
2. On a $\det(A_q) = -4 < 0$. Les valeurs propres de A_q sont donc de signes différents et $\mathcal{C}$ est une hyperbole.
3. En posant
$$\begin{cases} \tilde{x} & = & x \\ \tilde{y} & = & y - a \end{cases}$$
on a
$$\begin{cases} x & = & \tilde{x} \\ y & = & \tilde{y} + a \end{cases}$$
et
$$\begin{aligned} (E) & \Leftrightarrow 3\tilde{x}^2 + 4\tilde{x}(\tilde{y}+a) - 12\tilde{x} + 16 = 0 \\ & \Leftrightarrow 3\tilde{x}^2 + 4\tilde{x}\tilde{y} + (4a-12)\tilde{x} + 16 = 0 \end{aligned}$$
En posant alors $a = 3$, on obtient alors une équation de $\mathcal{C}$ sans terme linéaire. Le centre du repère $\tilde{\mathcal{R}}$ associé aux coordonnées $(\tilde{x}, \tilde{y})$ est donc le centre de symétrie Ω de $\mathcal{C}$.
Par ailleurs, puisque $\Omega = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\tilde{\mathcal{R}}}$, on a $\Omega = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$.
4. D'après les calculs précédents, on a
$$(\tilde{E}) \,:\, 3\tilde{x}^2 + 4\tilde{x}\tilde{y} + 16 = 0$$
On constate en particulier que la forme quadratique de cette équation est
$$3\tilde{x}^2 + 4\tilde{x}\tilde{y} = q(\tilde{x}, \tilde{y})$$
5. Puisque la forme quadratique reste inchangée et que le repère $\tilde{\mathcal{R}}$ est centré au centre de symétrie de $\mathcal{C}$, les axes de symétrie de $\mathcal{C}$ sont les sous espaces propres de la matrice A_q déterminée plus haut. On les obtient donc en diagonalisant la matrice A_q. On commence donc par déterminer les valeurs propres de A_q :
$$\begin{aligned} \chi_{A_q}(\lambda) &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda(\lambda-3) - 4 = \lambda^2 - 3\lambda - 4 \end{aligned}$$
On a alors $\Delta = 9 + 16 = 25$ et les valeurs propres de A_q sont
$$\lambda_1 = \frac{3-5}{2} = -1 \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \frac{3+5}{2} = 4$$
On détermine ensuite les sous espaces propres de A_q. Or la matrice A_q étant symétrique et taille 2, ses sous espaces propres sont deux droites orthogonales du plan. Or, par le

calcul, on trouve que E_{-1} est l'ensemble des solutions du système $A_q\tilde{X} = -\tilde{X}$ équivalent à l'équation

$$2\tilde{x} = 4\tilde{y} \ \Leftrightarrow\ \boxed{\tilde{y} = \frac{1}{2}\tilde{x}}$$

On en déduit que E_4 est la droite d'équation $\boxed{\tilde{y} = -2\tilde{x}}$.

D'après le changement de variables donné plus haut, on a donc, dans $\mathcal{R}$:

$$\begin{array}{lcl} E_{-1} & : & y = \frac{1}{2}x + 3 \\ E_4 & : & y = -2x + 3 \end{array}$$

Par ailleurs, l'axe focal de $\mathcal{C}$ est le sous espace propre associé à la valeur propre positive, soit E_4.

6. Les sommets de $\mathcal{C}$ sont, par définition, les points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec son axes focal. Il s'agit donc des points $S = \begin{pmatrix} \tilde{x}_S \\ \tilde{y}_S \end{pmatrix}_{\tilde{\mathcal{R}}}$ dont les coordonnées vérifient le système

$$\left\{ \begin{array}{l} 3\tilde{x}^2 + 4\tilde{x}\tilde{y} + 16 = 0 \\ \tilde{y} = -2\tilde{x} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \tilde{y} = -2\tilde{x} \\ 5\tilde{x}^2 - 16 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \tilde{x} = \pm\frac{4\sqrt{5}}{5} \\ \tilde{y} = \mp\frac{8\sqrt{5}}{5} \end{array} \right.$$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice ?? :

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice ?? :

⋆ ⋆

⋆