CONTRÔLE CONTINU - MATHÉMATIQUES

Conique, quadriques, formes quadratiques

Nom : .... Prénom : ....

Tous les exercices sont indépendants *Calculatrices autorisées*
Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation
Tous les résultats données devront être justifiés.

Exercice 1

1. Compléter la définition suivante : étant donnés un point F, une droite $\mathcal{D}$ ne passant pas par F et un réel $e > 0$, la conique $\mathcal{C}$ du plan $\mathcal{P}$ associée au triplet $(F, \mathcal{D}, e)$ est l'ensemble

$$\boxed{\mathcal{C} = \{M \in \mathcal{P} \ / \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}}$$

2. Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (xOy)$, on note
   — F le point de coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$,
   — $\mathcal{D}$ la droite d'équation $x = 1$,
   — $\mathcal{C}$ la conique de foyer F, de directrice $\mathcal{D}$ et d'excentricité $e = \frac{1}{2}$.

   (a) Donner la nature de $\mathcal{C}$. Justifier.

   (b) Placer le point F, la droite $\mathcal{D}$ et l'axe focal Δ_F de $\mathcal{C}$ dans le repère ci-joint.

   (c) Donner une équation de Δ_F dans $\mathcal{R}$.

   (d) Déterminer une équation de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{R}$.

   (e) Montrer que les sommets principaux de $\mathcal{C}$ sont les points

   $$S_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} \qquad \text{et} \qquad S_2 = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$$

   et les placer sur le dessin.

   (f) Déterminer les coordonnées du centre Ω de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{R}$ et le placer sur le dessin.

   (g) Déterminer les grandeurs caractéristiques a, b et c de $\mathcal{C}$.

   (h) Donner sans calcul l'équation de $\mathcal{C}$ dans le repère $\tilde{\mathcal{R}} = (\tilde{x}\Omega\tilde{y})$ obtenu en déplaçant le repère $\mathcal{R}$ en Ω.

(i) Déterminer les coordonnées des sommets secondaires de $\mathcal{C}$ dans le repère $\tilde{\mathcal{R}}$ puis dans $\mathcal{R}$ et les placer sur le dessin.

(j) Tracer une esquisse de $\mathcal{C}$.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Exercice 2

On considère le polynôme de degré 2

$$p(x,y) = x^2 + 4xy + y^2 + 4x - 4y$$

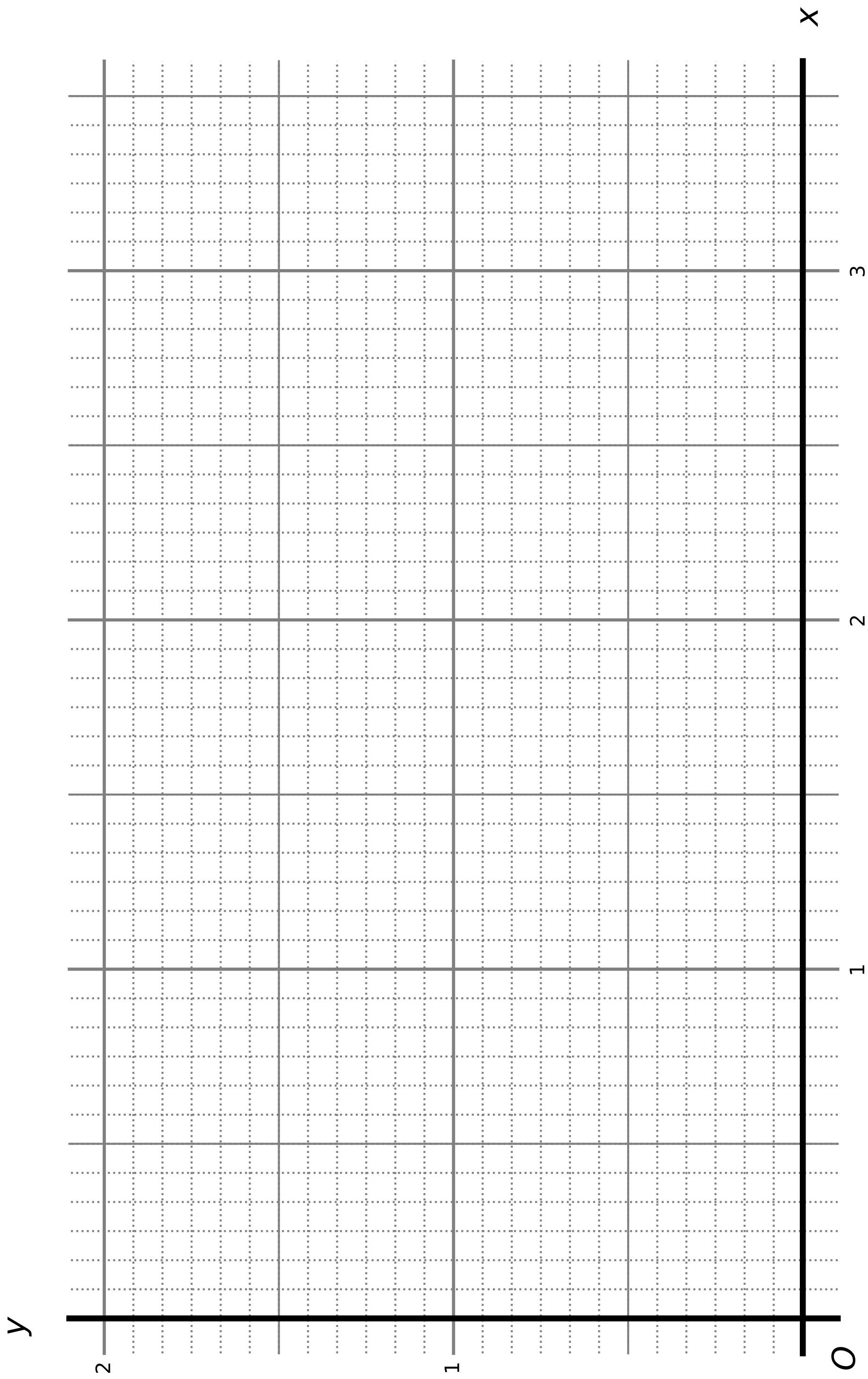
Par ailleurs, on se place dans le plan muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R}_1 = (xOy)$ et, pour tout $k \in \mathbb{R}$, on note $\mathcal{C}_k$ la conique du plan d'équation

$$(E_k) \,:\, p(x,y) = k$$

1. Isoler la partie quadratique $q(x,y)$ de $p(x,y)$ et donner sa matrice A.
2. Montrer $\operatorname{Spec}(A) = \{-1, 3\}$.
3. Donner la signature de la forme quadratique q et en déduire la nature des coniques $\mathcal{C}_k$.
4. Déterminer une base orthonormée $\mathcal{B}_2 = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$ du plan faite de vecteurs propres de A. On prendra $\overrightarrow{e_1} \in E_{-1}$ et $\overrightarrow{e_2} \in E_3$.
   On note $\mathcal{R}_2 = (\tilde{x}O\tilde{y})$ le repère associé à cette nouvelle base.
5. Déterminer l'équation $(\tilde{E}_k)$ de $\mathcal{C}_k$ dans le repère $\mathcal{R}_2$.
6. Déterminer un changement de variables de la forme
   $$\begin{cases} u = \tilde{x} + \delta_1 \\ v = \tilde{y} + \delta_2 \end{cases}, \quad \delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}$$
   tel que, pour tout $k \in \mathbb{R}$, l'équation de $\mathcal{C}_k$ dans le repère $\mathcal{R}_3$ associé aux coordonnées (u,v) soit
   $$-u^2 + 3v^2 = k - 8$$
7. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{R}$, la conique $\mathcal{C}_k$ est symétrique par rapport aux axes du repère $\mathcal{R}_3$ et par rapport au centre Ω de $\mathcal{R}_3$.
8. Déterminer les coordonnées de Ω dans $\mathcal{R}_1$.
9. Déterminer, en fonction de k, les coordonnées dans $\mathcal{R}_3$ des sommets de $\mathcal{C}_k$.
10. Selon les valeurs de k, donner une équation de l'axe focal de $\mathcal{C}_k$ dans le repère $\mathcal{R}_1$.
11. Montrer que toutes les coniques $\mathcal{C}_k$ ont en commun deux droites asymptotes dont on donnera les équations dans le repère $\mathcal{R}_1$.

⋆ ⋆
⋆

ANNEXE



CORRECTION

Coniques, quadriques, formes quadratiques - 2021/2022

Correction Exercice 1 (Exercice ▲)

1. $$\mathcal{C} = \{M \in \mathcal{P} \ / \ d(M,F) = e.d(M,\mathcal{D})\}$$

2. (a) Puisque $0 < e < 1$, la conique $\mathcal{C}$ est une ellipse.

   (b) c.f. dessin en fin de correction.

   (c) L'axe focal est la droite perpendiculaire à $\mathcal{D}$ passant par F. Il s'agit donc de la droite
   $$\Delta_F : y = 1$$

   (d) Un point $m = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$ du plan appartient à $\mathcal{C}$ si et seulement si
   $$\begin{aligned} d(M,F) = \frac{1}{2}d(M,\mathcal{D}) &\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 = \frac{1}{4}(x-1)^2 \\ &\Leftrightarrow \boxed{\frac{3}{4}x^2 + y^2 - \frac{7}{2}x - 2y + \frac{19}{4} = 0} \end{aligned}$$

   (e) Les sommets principaux de $\mathcal{C}$ sont les points de $\mathcal{C}$ situés sur son axe focal. Ainsi, $S = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$ est un sommet de $\mathcal{C}$ si et seulement si
   $$\begin{aligned} \begin{cases} y = 1 \\ d(M,F) = \frac{1}{2}d(M,\mathcal{D}) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ (x-2)^2 + (y-1)^2 = \dfrac{1}{4}(x-1)^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ \dfrac{3}{4}x^2 - \dfrac{7}{2}x + \dfrac{15}{4} = 0 \end{cases} \end{aligned}$$
   En isolant la seconde équation, on a
   $$\frac{3}{4}x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{15}{4} = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 14x + 15 = 0$$
   Le discriminant de ce polynôme est
   $$\Delta = (-14)^2 - 4 \times 3 \times 15 = 196 - 180 = 16$$
   et ses racines sont
   $$x_1 = \frac{14 + \sqrt{16}}{6} = 3$$
   et
   $$x_2 = \frac{14 - \sqrt{16}}{6} = \frac{5}{3}$$
   Les sommets principaux de $\mathcal{S}$ sont donc les points proposés.

(f) Le centre Ω de $\mathcal{C}$ est le milieu du segment $[S_1S_2]$, donc

$$x_\Omega = \frac{1}{2}\left(3 + \frac{5}{3}\right) = \frac{7}{3} \qquad \text{et } y_\Omega = 1$$

d'où

$$\Omega = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$$

(g) Par définition, on a

$$a = \frac{1}{2}\, S_1S_2 = \frac{1}{2}\left(3 - \frac{5}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

et

$$c = F\Omega = \frac{7}{3} - 2 = \frac{1}{3}$$

et

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{\frac{4}{9} - \frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

(h)

$$\frac{9}{4}\tilde{x}^2 + 3\tilde{y}^2 = 1$$

(i) Les sommets secondaires de $\mathcal{C}$ sont les points

$$S_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}_{\tilde{\mathcal{R}}} \qquad \text{et} \qquad S_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}_{\tilde{\mathcal{R}}}$$

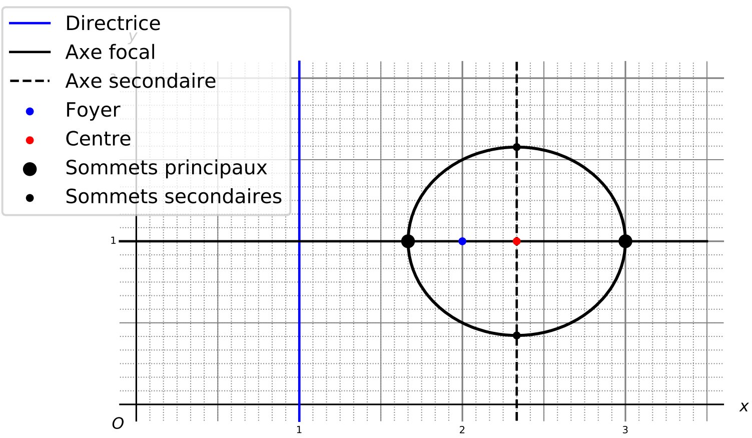
Dans le repère $\mathcal{R}$, on a

$$S_3 = \overrightarrow{OS_3} = \overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega S_3} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 7 \\ 3 + \sqrt{3} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$$

et

$$S_4 = \overrightarrow{OS_4} = \overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega S_4} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 7 \\ 3 - \sqrt{3} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$$

(j)



⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Correction Exercice 2 (EXERCICE ▲)

$$p(x,y) = x^2 + 4xy + y^2 + 4x - 4y$$

1. $q(x,y) = x^2 + 4xy + y^2$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

2. $$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = (-1-\lambda)(3-\lambda)$$

   donc $\mathrm{Spec}(A) = \{-1, 3\}$.

3. Au vue des signes des valeurs propres ci-dessus, on a

   $$\sigma(q) = (1,1)$$

   donc les coniques $\mathcal{C}_k$ sont des hyperboles.

4. On détermine les sous espaces propres de A :
   — $\underline{E_{-1}}$:

   $$AX = -X \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccc} x & + & 2y & = & -x \\ 2x & + & y & = & -y \end{array} \right. \Leftrightarrow y = -x$$

   D'où

   $$E_{-1} = \{(x, -x), \quad x \in \mathbb{R}\}$$

   et l'on pose (par exemple)

   $$e_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$$

   — $\underline{E_3}$:

   $$AX = 3X \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccc} x & + & 2y & = & 3x \\ 2x & + & y & = & 3y \end{array} \right. \Leftrightarrow y = x$$

   D'où

   $$E_3 = \{(x, x), \quad x \in \mathbb{R}\}$$

   et l'on pose (par exemple)

   $$e_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$$

   La matrice A étant symétrique, les sous espaces propres sont orthogonaux entre eux (on peut le vérifier si nécessaire). Les deux vecteurs e_1 et e_2 étant normés, la famille $\{e_1, e_2\}$ est une BON du plan.

5. La matrice de passage de $\mathcal{R}$ à $\mathcal{R}'$ est

$$P = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et d'après la formule de changement de variable pour les vecteurs, on a

$$X = P\tilde{X} \iff \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & \dfrac{\sqrt{2}}{2}(-\tilde{x}+\tilde{y}) \\ \\ y & = & \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\tilde{x}+\tilde{y}) \end{array} \right.$$

En injectant les formules ci-dessus dans le polynôme $p(x,y)$, on obtient

$$\begin{aligned} p(x,y) &= x^2+4xy+y^2+4x-4y \\ &= \underbrace{-\tilde{x}^2+3\tilde{y}^2}_{\tilde{q}(\tilde{x},\tilde{y})} + 2\sqrt{2}(-\tilde{x}+\cancel{\tilde{y}}) - 2\sqrt{2}(\tilde{x}+\cancel{\tilde{y}}) \\ &= -\tilde{x}^2+3\tilde{y}^2-4\sqrt{2}\tilde{x} = \tilde{p}(\tilde{x},\tilde{y}) \end{aligned}$$

donc une équation de $\mathcal{C}_k$ dans $\tilde{\mathcal{R}}$ est

$$\tilde{p}(\tilde{x},\tilde{y}) = k \iff \boxed{-\tilde{x}^2+3\tilde{y}^2-4\sqrt{2}\tilde{x} = k}$$

6. En s'appuyant sur la mise sous forme canonique des polynômes, on observe que

$$\begin{aligned} -\tilde{x}^2+3\tilde{y}^2-4\sqrt{2}\tilde{x} = k &\iff -\left(\left(\tilde{x}+2\sqrt{2}\right)^2-8\right)+3\tilde{y}^2 = k \\ &\iff -\left(\tilde{x}+2\sqrt{2}\right)^2+3\tilde{y}^2 = k-8 \\ &\iff -u^2+3v^2 = k-8 \end{aligned}$$

en posant

$$\left\{ \begin{array}{lcl} u & = & \tilde{x}+2\sqrt{2} \\ v & = & \tilde{y} \end{array} \right.$$

7. Pour tout $k \in \mathbb{R}$, l'équation réduite obtenue ci-dessus est invariante par changement de signe $u \rightsquigarrow -u$ et/ou $v \rightsquigarrow -v$. Cela signifie en particulier que si un point $M = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_3}$ appartient à $\mathcal{C}_k$, les points des coordonnées $\begin{pmatrix} \pm u \\ \pm v \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_3}$ appartiennent également à $\mathcal{C}_k$ et $\mathcal{C}_k$ est symétrique par rapport aux axes du repère $\mathcal{R}_3$ et par rapport au centre Ω.

8. D'après les résultats obtenus ci-dessus, on a

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_3} = \begin{pmatrix} -2\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1}$$

9. Par définition, les sommets de $\mathcal{C}_k$ sont les points de $\mathcal{C}_k$ situés sur ses axes de symétrie. Ainsi,

— Sur l'axe (Ωu) : les sommets de $\mathcal{C}_k$ situés sur l'axe (Ωu) sont les points $S = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_3}$ tels que

$$\begin{cases} v = 0 \\ -u^2 + 3v^2 = k - 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 0 \\ u^2 = 8 - k \end{cases}$$

La seconde équation admet des solutions si et seulement si

$$8 - k \geqslant 0 \Leftrightarrow k \leqslant 8$$

et dans ce cas,

$$u^2 = 8 - k \Leftrightarrow u = \pm\sqrt{8 - k}$$

Ainsi, si $k < 8$, les sommets de $\mathcal{C}_k$ sont les points

$$S_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{8-k} \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_3} \qquad \text{et} \qquad S_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{8-k} \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_3}$$

— Sur l'axe (Ωv) : les sommets de $\mathcal{C}_k$ situés sur l'axe (Ωv) sont les points $S = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_3}$ tels que

$$\begin{cases} u = 0 \\ -u^2 + 3v^2 = k - 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 0 \\ 3v^2 = k - 8 \end{cases}$$

La seconde équation admet des solutions si et seulement si

$$k - 8 \geqslant 0 \Leftrightarrow k \geqslant 8$$

et dans ce cas,

$$3v^2 = k - 8 \Leftrightarrow v = \pm\sqrt{\frac{k-8}{3}}$$

Ainsi, si $k > 8$, les sommets de $\mathcal{C}_k$ sont les points

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{\frac{k-8}{3}} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_3} \qquad \text{et} \qquad S_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{\frac{8-k}{3}} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_3}$$

10. Par définition, l'axe focal de l'hyperbole $\mathcal{C}_k$ est l'axe contenant ses sommets. Ainsi, d'après les résultats obtenus ci-dessus,

— Si $k < 8$, l'axe focal de $\mathcal{C}_k$ est l'axe (Ωu) :

$$(\Omega u) : v = 0 \Leftrightarrow \tilde{y} = 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y) = 0 \Leftrightarrow y = -x$$

— Si $k > 8$, l'axe focal de $\mathcal{C}_k$ est l'axe (Ωv) :

$$(\Omega v) : u = 0 \Leftrightarrow \tilde{x} + 2\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}(-x + y) + 2\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow y = x - 4$$

Note : si $k = 8$, on a

$$-u^2 + 3v^2 = 0 \iff (\sqrt{3}v - u)(\sqrt{3}v + u) = 0$$

et la conique $\mathcal{C}_8$ est un couple de droites du plan qui se coupent en Ω. Cette conique n'a donc pas d'axe focal (les deux axes de symétrie sont "équivalents").

11. Pour tout $k \in \mathbb{R}$, les asymptotes de $\mathcal{C}_k$ sont les droites définies par l'équation

$$-u^2 + 3v^2 = 0 \iff (\sqrt{3}v - u)(\sqrt{3}v + u) = 0$$

Ces droites ne dépendent pas de k et sont donc asymptotes à toutes les coniques $\mathcal{C}_k$.

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
\sqrt{3}v - u = 0 &\iff \sqrt{3}\tilde{y} - (\tilde{x} + 2\sqrt{2}) = 0 \\
&\iff \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}(-x+y) - 2\sqrt{2} = 0 \\
&\iff \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}y = 2\sqrt{2} \\
&\iff \frac{\sqrt{3}+1}{2}x + \frac{\sqrt{3}-1}{2}y = 2
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\sqrt{3}v + u = 0 &\iff \sqrt{3}\tilde{y} + (\tilde{x} + 2\sqrt{2}) = 0 \\
&\iff \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}(-x+y) - 2\sqrt{2} = 0 \\
&\iff \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}y = 2\sqrt{2} \\
&\iff \frac{\sqrt{3}-1}{2}x + \frac{\sqrt{3}+1}{2}y = 2
\end{aligned}$$

⋆ ⋆
⋆