CONTRÔLE CONTINU

Fonctions réelles - Limites et continuité.

Tous les exercices sont indépendants. *Calculatrices autorisées*
Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation.

Exercice 1 Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{2x^2+1}{x^2+1}$$

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer les limites $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.
3. Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad 1 \leqslant f(x) \leqslant 2$$
4. Déterminer l'image $\mathrm{Im}(f)$ de f.
5. Montrer que pour toute fonction g définie sur $\mathbb{R}$, la fonction $f \circ g$ est bornée.
6. Montrer que pour toute fonction h continue définie sur $\mathbb{R}$, la fonction $h \circ f$ est bornée.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 Un marcheur parcourt dix kilomètres en deux heures. On souhaite montrer qu'il existe au moins une heure au cours de laquelle le marcheur a parcouru exactement cinq kilomètres.

Pour cela, on note f la fonction de l'intervalle $[0,2]$ dans l'intervalle $[0,10]$ qui à chaque t de $[0,2]$ associe la distance parcourue au bout de t heures de marches.

On note également φ la fonction définie par

$$\varphi\ :\ t \mapsto f(t+1) - f(t)$$

1. Donner les valeurs de $f(0)$ et $f(2)$.
2. Donner le domaine de définition de la fonction φ.
3. Calculer $\varphi(0)$ et $\varphi(1)$ en fonction de $f(1)$.
4. Montrer qu'il existe $t \in [0,1]$ tel que $\varphi(t) = 5$ (on pourra distinguer les cas $f(1) < 5$, $f(1) = 5$ et $f(1) > 5$).

5. Conclure.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|}$$

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Montrer que f est impaire et que $f(x)$ est toujours du signe de x.
3. Calculer la limite $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
4. En déduire l'image de $\mathbb{R}^+$ par la fonction f puis l'image de $\mathbb{R}$.
5. Soit $y \in [0,1[$. Montrer qu'il existe un unique $x \in \mathbb{R}^+$ tel que $y = f(x)$. On donnera explicitement x en fonction de y.
6. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans l'intervalle $[0,1[$ puis de $\mathbb{R}$ dans $]-1,1[$.
7. Donner l'expression de $f^{-1}(y)$ pour tout $y \in]-1,1[$ (on pourra commencer par distinguer les cas $y \geqslant 0$ et $y < 0$).

⋆ ⋆
⋆

CORRECTION

Exercice 1 :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geqslant 0$ donc $x^2+1 \geqslant 1 > 0$. Donc $D_f = \mathbb{R}$.
2. $$f(x) = \frac{2x^2+1}{x^2+1} = \frac{2\cancel{x^2}\left(1+\frac{1}{2x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}$$ $$= \frac{2\left(1+\frac{1}{2x^2}\right)}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} 2$$
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $$f(x) = \frac{2x^2+1}{x^2+1} \geqslant \frac{x^2+1}{x^2+1} = 1$$ et $$f(x) = \frac{2x^2+1}{x^2+1} \leqslant \frac{2x^2+2}{x^2+1} = \frac{2(x^2+1)}{x^2+1} = 2$$ Donc $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad 1 \leqslant f(x) \leqslant 2$$
4. D'après la question précédente, $\mathrm{Im}(f) \subset [1,2]$. Par ailleurs, $f(0)=1$. Donc f étant continue, et d'après le calcul de limites précédent, on a $\mathrm{Im}(f) = [1,2[$.

5. Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f \circ g(x) = f(g(x))$, l'image de $f\circ g$ est incluse dans l'image de f. Donc $\mathrm{Im}(f\circ g) \subset [1,2[$. La fonction $f \circ g$ est donc bornée par 1 et 2.
6. Soit h une fonction continue définie sur $\mathbb{R}$. L'image par $\mathrm{Im}(h\circ f)$ est incluse dans $h(\mathrm{Im}(f)) = h([1,2[) \subset h([1,2])$. Or h étant continue, l'image d'un intervalle est un intervalle $[m,M]$. Donc $h \circ f$ est bornée (par m et M).

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 :

1. D'après la mise en place du problème, il est clair que $f(0)=0$ et $f(2)=10$.
2. La fonction f étant définie sur $[0,2]$, la quantité $\varphi(t)$ existe pour tout t tel que $t \in [0,2]$ et $t+1 \in [0,2]$, c'est à dire pour tout $t \in [0,1]$.
3. $$\varphi(0) = f(1) - f(0) = f(1)$$ et $$\varphi(1) = f(2) - f(1) = 10 - f(1)$$
   — Si $f(1) < 5$, alors $\varphi(0) < 5$ et $\varphi(1) > 5$. Les fonctions f et φ étant continues, le TVI assure qu'il existe $t \in [0,1]$ tel que $\varphi(t) = 5$.

— Si $f(1) > 5$, alors $\varphi(0) > 5$ et $\varphi(1) < 5$. Il existe donc de même $t \in [0,1]$ tel que $\varphi(t) = 5$.

— Si $f(1) = 5$, alors $\varphi(0) = 5$.

4. La quantité $\varphi(t) = f(t+1) - f(t)$ représente la distance parcourue par le marcheur en une heure (entre l'heure t et l'heure $t+1$). D'après l'étude précédente, il existe $t \in [0,1]$ tel que cette distance est exactement égale à 5km.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|x| \geqslant 0$ donc $1 + |x| \geqslant 1 > 0$. Donc $f(x)$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}$. Autrement dit, $D_f = \mathbb{R}$.

2. Le domaine de définition de f est symétrique par rapport à 0 et
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(-x) = \frac{-x}{1+|-x|} = -\frac{x}{1+|x|} = -f(x)$$
donc f est impaire.
D'autre part, puisque $1 + |x| > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, la quantité $\frac{x}{1+|x|}$ est toujours du signe de x.

3. Puisque l'on étudie la limite en $+\infty$, on peut considérer que $x \geqslant 0$. Donc $|x| = x$ et
$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{1+x} = \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)} \\ &= \frac{1}{1+\frac{1}{x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \end{aligned}$$

4. Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$ (car $1 + x \geqslant x$). D'autre part, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et donc sur $\mathbb{R}^+$ (car composée et quotient de fonctions continues).
Ainsi, puisque $f(0) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$, alors $f(\mathbb{R}^+) = [0,1[$. Enfin, f étant impaire, on en déduit que $f(\mathbb{R}^-) =]-1,0]$ et $f(\mathbb{R}) =]-1,1[$.

5. Soit $y \in [0,1[$. On a
$$\begin{aligned} y = f(x) &\iff y = \frac{x}{1+|x|} \\ &\iff x \geqslant 0 \text{ et } y = \frac{x}{1+x} \\ &\iff x \geqslant 0 \text{ et } (1+x)y = x \\ &\iff x \geqslant 0 \text{ et } x(1-y) = y \\ &\iff x \geqslant 0 \text{ et } x = \frac{y}{1-y} \end{aligned}$$

6. D'après les calculs précédents, f réalise une bijection de $\mathbb{R}^+ \to [0,1[$.
   Par ailleurs, pour tout $y \in]-1,0]$, on a $-y \in [0,1[$. Il existe donc un unique $x \in \mathbb{R}^+$ tel que $-y = f(x)$. Mais alors $y = -f(x) = f(-x)$. Autrement dit, il existe un unique $\tilde{x} \in \mathbb{R}^-$ tel que $y = f(\tilde{x})$. Par définition, f réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-1,1[$.
7. D'après les calculs précédents, pour tout $y \in [0,1[$, on a

$$f^{-1}(y) = \frac{y}{1-y}$$

   D'autre part, d'après la question précédente, pour tout $y \in]-1,0]$, il existe $x \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\begin{aligned} y = f(-x) &\iff y = \frac{-x}{1+|-x|} = -\frac{x}{1+x} \\ &\iff (1+x)y = -x \\ &\iff x(y+1) = -y \\ &\iff -x = \frac{y}{1+y} \end{aligned}$$

   Donc pour tout $y \in]-1,0]$, on a $f^{-1}(y) = \frac{y}{1+y}$.
   Finalement, on peut rassembler les deux écritures de la façon suivante :

$$\forall y \in]-1,1[, \qquad f^{-1}(y) = \frac{y}{1-|y|}$$

⋆ ⋆
⋆