CONTRÔLE CONTINU

Fonctions réelles - Comparaison locale et intégration

Tous les exercices sont indépendants. *Calculatrices autorisées*
Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation.

Exercice 1

1. Donner le développement limité à l'ordre 2 de la fonction
$$f\ :\ x \longmapsto \ln(\cos(x))$$
puis en déduire un équivalent simple de $f(x)$ en 0.
2. Donner un équivalent simple de la fonction
$$g\ :\ x \longmapsto \sqrt{x^2+x} - \sqrt[3]{2x^3+4x^2}$$
au voisinage de $+\infty$.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2

1. *Un calcul préliminaire*
Soit
$$\begin{array}{rccc} g & : & \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & x-1-x\ln(x) \end{array}$$
On admettra que g est dérivable sur son domaine de définition.
   (a) Calculer $g'(x)$ pour tout $x>0$.
   (b) En déduire les variations de g.
   (c) Montrer que $g(x) \leqslant 0$ pour tout $x>0$.

2. Soit f la fonction réelle définie par
$$f(x) = e^{\frac{\ln(x)}{x-1}}$$
   (a) Déterminer le domaine de définition D_f de f.
   (b) *Étude de la dérivée*
      i. Montrer que f est dérivable sur D_f et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in D_f$.
      ii. En déduire le tableau de variation de la fonction f.
      Indication : on pourra s'appuyer sur le résultat obtenu à l'issue du calcul préliminaire.

(c) Calculer les limites

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x)$$

(d) *Étude au voisinage de* 1

i. À l'aide du changement de variable $x = 1 + h$, montrer que

$$f(x) = e - \frac{e}{2}(x-1) + o((x-1))$$

ii. Montrer que f se prolonge par continuité en 1 pour une valeur de $f(1)$ que l'on précisera (on appellera encore f la fonction prolongée ainsi obtenue).

iii. Montrer que le prolongement f est dérivable en 1 et donner la valeur de $f'(1)$ ainsi que l'équation de la tangente à la courbre $\mathcal{C}_f$ de f en 1.

(e) Tracer une esquisse de $\mathcal{C}_f$. On fera en particulier apparaître la tangente à $\mathcal{C}_f$ en 1 ainsi que l'asymptote de $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 1. À l'aide du changement de variables $x = \ln(t)$, calculer l'intégrale

$$I = \int_1^e \frac{dt}{t + t(\ln(t))^2}$$

2. À l'aide de deux intégrations par parties, montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad J_k = \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \cos(kt)\ dt = \frac{1}{k^2}$$

⋆ ⋆
⋆

CORRECTION

Exercice 1 :

1. Le développement limité de la fonction cosinus donne

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

donc

$$f(x) = \ln\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)$$

est de la forme $\ln(1-u)$ avec $u = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ est d'ordre 2 en x et tend vers 0 en 0. D'autre part

$$\ln(1-u) = -u + o(u)$$

D'où

$$f(x) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

Donc $f(x) =\underset{0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2}$.

2. Les termes "importants" de l'expression $f(x) = \sqrt{x^2+x} - \sqrt[3]{2x^3+4x^2}$ au voisinage de $+\infty$ sont les plus grandes puissances de x. En factorisant dans chaque terme de la somme, on a

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)^{\frac{1}{2}} - \left(x^3\left(2+\frac{4}{x}\right)\right)^{\frac{1}{3}} \\ &= x\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(2+\frac{4}{x}\right)^{\frac{1}{3}}\right] \end{aligned}$$

Le crochet ci-dessus tendant vers -1, on en déduit que le quotient $\dfrac{f(x)}{-x}$ tend vers 1 et

$$f(x) \underset{+\infty}{\sim} -x$$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 :

1. (a)

$$\begin{aligned} \forall x > 0, \qquad g'(x) &= 1 - \left(1.\ln(x) + x.\frac{1}{x}\right) \\ &= -\ln(x) \end{aligned}$$

(b)

(c) D'après le tableau ci-dessus, g atteint son maximum en $x = 1$. Or $g(1) = 0$ donc $g(x) \leqslant 0$ pour tout $x > 0$.

2. (a) $f(x)$ existe pour tout $x > 0$ tel que $x \neq 1$. Donc $D_f =]0,1[\cup]1,+\infty[$.

(b) i. f est une composée de fonctions dérivables sur leurs domaines. Elle est donc dérivable sur son domaine. De plus pour tout $x \in D_f$, on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{1}{x}.(x-1) - \ln(x).1}{(x-1)^2} e^{\frac{\ln(x)}{x-1}} \\ &= \frac{x - 1 - x\ln(x)}{x(x-1)^2} e^{\frac{\ln(x)}{x-1}} \end{aligned}$$

ii. D'après le calcul ci-dessus, on a

$$\forall x \in D_f, \qquad f'(x) = \frac{g(x)}{x(x-1)^2} e^{\frac{\ln(x)}{x-1}}$$

Chaque facteur ci-dessus est de signe constant et seul $g(x)$ est négatif. Donc $f'(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in D_f$. f est donc décroissante sur son domaine de définition.

(c)

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = e^{+\infty} = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = e^0 = 1$$

(d) i. En posant $x = 1 + h$, on a

$$f(x) = f(1+h) = e^{\frac{\ln(1+h)}{h}}$$

Or

$$\ln(1+h) = h - \frac{h^2}{2} + o(h^2) \qquad \text{et} \qquad e^u = 1 + u + o(u)$$

donc

$$\begin{aligned} e^{\frac{\ln(1+h)}{h}} &= e^{1-\frac{h}{2}+o(h)} \\ &= e.e^{-\frac{h}{2}+o(h)} \\ &= e.\left(1 - \frac{h}{2} + o(h)\right) \\ &= e - \frac{e}{2}.h + o(h) \end{aligned}$$

En posant $h = (x-1)$, on a bien

$$f(x) = e - \frac{e}{2}(x-1) + o((x-1))$$

ii. D'après le calcul précédent, on a

$$\lim_{x\to 1} f(x) = e$$

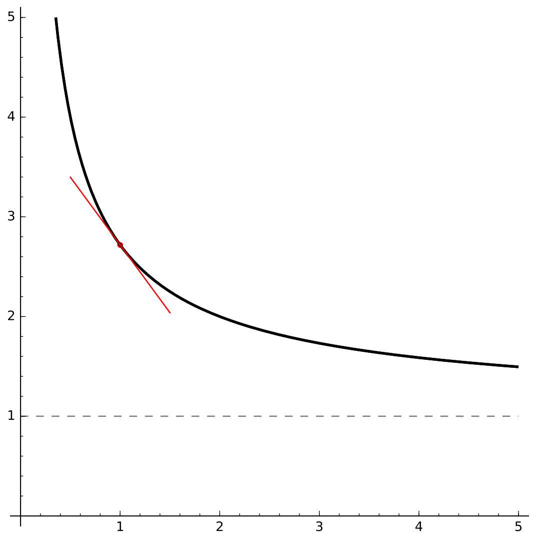
Cette limite étant finie, on peut prolonger f en une fonction continue sur $]0,+\infty[$ en posant $f(1) = e$.

iii. D'après le développement limité calculé plus haut, on a

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = -\frac{e}{2} + o(1) \underset{x\to 1}{\longrightarrow} -\frac{e}{2}$$

Le prolongement de f en 1 est donc dérivable en 1 et $f'(1) = -\frac{e}{2}$ et l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en 1 est

$$T_1 \,:\, y = -\frac{e}{2}(x-1) + e = -\frac{e}{2}x + \frac{3e}{2}$$



⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 :

1.

$$I = \int_1^e \frac{1}{t+t(\ln(t))^2}dt = \int_1^e \frac{\frac{1}{t}dt}{1+\ln(t)^2} \underset{\begin{array}{c|c} x=\ln(t) & t=e^x \\ dx=\frac{1}{t}dt & dt=e^x dx \\ x\in[0,1] & t\in[1,e] \end{array}}{=} \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= [\arctan(x)]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

2. On pose

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{t^2}{2\pi} - t & \Rightarrow \quad u'(t) &= \frac{t}{\pi} - 1 \\ v'(t) &= \cos(kt) & \Rightarrow \quad v(t) &= \frac{1}{k}\sin(kt) \end{aligned}$$

et l'on a

$$J_k = \left[\cancel{\frac{t^2}{2k\pi}\sin(kt)}\right]_0^\pi - \frac{1}{k}\int_0^\pi \left(\frac{t}{\pi} - 1\right)\sin(kt)dt$$

On pose

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{t}{\pi} - 1 &\Rightarrow\quad u'(t) &= \frac{1}{\pi} \\ v'(t) &= \sin(kt) &\Rightarrow\quad v(t) &= -\frac{1}{k}\cos(kt) \end{aligned}$$

et l'on a

$$\begin{aligned} J_k &= -\frac{1}{k}\left(-\frac{1}{k}\left[\left(\frac{t}{\pi}-1\right)\cos(kt)\right]_0^{\pi} + \frac{1}{k\pi}\int_0^{\pi}\cos(kt)dt\right) \\ &= \frac{1}{k^2} - \frac{1}{\pi k^2}\int_0^{\pi}\cos(kt)dt = \frac{1}{k^2} \end{aligned}$$

⋆ ⋆

⋆