# CONTRÔLE CONTINU

Équations différentielles.

Durée : 1h30 *Les calculatrices sont autorisées.*

Tous les exercices sont indépendants.
Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation.

**Exercice 1** Soit

$$(E)\ :\ t(t^2+1)y' - 2y = t^3(t-1)^2e^{-t}$$

1. Déterminer les intervalles de résolution de $(E)$ (justifier).
2. *Résolution sur* $I_1 = ]0,+\infty[$
   (a) *Résolution de l'équation homogène*
      i. Déterminer trois réels $a$, $b$ et $c$ tels que
      $$\forall t \in I_1, \qquad \frac{2}{t(t^2+1)} = \frac{a}{t} + \frac{bt+c}{t^2+1}$$
      ii. En déduire une primitive sur $I_1$ de la fonction $t \longmapsto \dfrac{2}{t(t^2+1)}$
      iii. Résoudre sur l'intervalle $I_1$ l'équation différentielle
      $$(H)\ :\ t(t^2+1)y' - 2y = 0$$
   (b) *Recherche d'une solution particulière*
   On suppose que l'équation $(E)$ admet sur $I_1$ une solution particulière $y_p$ sous la forme
   $$y_p\ :\ t \longmapsto \lambda(t)\frac{t^2}{1+t^2}$$
      i. Montrer qu'alors
      $$\forall t \in I_1, \qquad \lambda'(t) = (t-1)^2e^{-t}$$
      ii. Déterminer par identification trois réels $\alpha, \beta, \gamma$ tels que la fonction définie par
      $$t \longmapsto (\alpha t^2 + \beta t + \gamma)e^{-t}$$
      soit une primitive de $[t \mapsto (t-1)^2e^{-t}]$ sur $I_1$.
      iii. En déduire la solution $y_p$ cherchée puis l'ensemble des solutions de $(E)$ sur $I_1$.
3. *Résolution sur* $I_2 = ]-\infty, 0[$
   Montrer que l'ensemble des solutions de $(E)$ sur $I_2$ est l'ensemble des fonctions de la forme
   $$y\ :\ t \longmapsto \mu\frac{t^2}{1+t^2} - t^2e^{-t}, \quad \mu \in \mathbb{R}.$$
4. *Solutions traversantes*
   Montrer que chacune des solutions de $(E)$ sur $I_1$ peut se prolonger en une solution sur $\mathbb{R}$.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

**Exercice 2** Soit

$$(E)\ :\ y' = y.\sin^2(y)$$

1. Donner les caractéristiques de l'équation $(E)$.
2. Montrer que $(E)$ admet une infinités de solutions constantes à déterminer.
3. Soit $y_0 \in \mathbb{R}\backslash\{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ et $Y$ l'unique solution de $(E)$ vérifiant $Y(0) = y_0$.
   (a) Montrer que $Y$ est de signe constant et bornée sur $\mathbb{R}$. On précisera le signe de $Y(t)$ en fonction de $y_0$.
   (b) Montrer que $Y$ est monotone. On précisera le sens de variation de $Y$ en fonction de $y_0$.
   (c) Tracer l'allure de quelques solutions.
   (d) En déduire la nature des points fixes déterminés à la question 2.

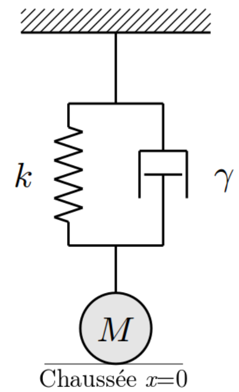
⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

**Exercice 3** Le dispositif ci-contre représente un amortisseur de voiture. Il est composé d'un ressort de raideur $k > 0$ couplé à un piston hydraulique de paramètre $\gamma > 0$. En notant $M$ la masse suspendue au dispositif et $x(t)$ la hauteur de cette masse à l'instant $t$, les lois de la physique permettent de montrer que la fonction $x$ est solution de l'équation différentielle

$$(E)\ :\ Mx'' + \gamma x' + kx = 0$$

$(x(t) = 0$ représentant le contact de la roue avec la chaussée).

1. Donner les caractéristiques de l'équation $(E)$.
2. Déterminer, en fonction de $M$, $\gamma$ et $k$, le polynôme caractéristique de $(E)$.
3. En déduire une condition sur $M$, $\gamma$ et $k$ pour que les solutions de $(E)$ ne soient pas oscillantes.
4. Montrer que sous ces conditions, les solutions de $(E)$ convergent vers 0 à une vitesse exponentielle.
5. Déterminer une condition sur $M$, $\gamma$ et $k$ pour que, si la roue quitte la chaussée à $t = 0$, elle revienne au contact le plus rapidement possible.




⋆ ⋆
⋆

# CORRECTION

**Exercice 1** :

1. Les valeurs interdites sont ici les valeurs qui annulent le coefficient $t(1+t^2)$ de $y'$, soit $t=0$. Les deux intervalles de résolution sont donc
$$I_1 = ]0,+\infty[ \quad \text{et} \quad I_2 = ]-\infty,0[.$$

2. (a) i. Pour déterminer les réels $a$, $b$ et $c$, on peut procéder par identification :
$$\frac{a}{t}+\frac{bt+c}{t^2+1}=\frac{a(t^2+1)+t(bt+c)}{t(t^2+1)}=\frac{(a+b)t^2+ct+a}{t(t^2+1)}$$
Donc
$$\frac{a}{t}+\frac{bt+c}{t^2+1}=\frac{2}{t(t^2+1)} \iff \left\{\begin{array}{lcl} a+b &=& 0\\ c &=& 0\\ a &=& 2\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} a &=& 2\\ b &=& -2\\ c &=& 0\end{array}\right.$$
et
$$\frac{2}{t(t^2+1)}=\frac{2}{t}-\frac{2t}{1+t^2}$$

ii. D'après la décomposition en éléments simple effectuée à la question précédente, les primitives de $\left[t\mapsto \frac{2}{t(t^2+1)}\right]$ sur $I_1$ sont
$$t\longmapsto 2\ln|t|-\ln|t^2+1|+K=\ln\left(\frac{t^2}{t^2+1}\right)+K. \qquad (K\in\mathbb{R})$$

iii.
$$\begin{aligned}(H) &\iff \frac{y'}{y}=\frac{2}{t(t^2+1)}\\ &\iff \ln|y(t)|=\ln\left(\frac{t^2}{t^2+1}\right)+K\\ &\iff y(t)=\lambda\frac{t^2}{t^2+1}, \qquad \lambda=\pm e^K\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$
Les solution de $(H)$ sur $I_1$ sont donc les fonctions $y_h$ de la forme
$$y_h\ :\ t\longmapsto \lambda\frac{t^2}{t^2+1}, \qquad \lambda\in\mathbb{R}.$$

(b) i. Si $y_p(t)=\lambda(t)\frac{t^2}{t^2+1}$, alors
$$y_p'(t)=\lambda'(t)\frac{t^2}{t^2+1}+\lambda(t)\frac{2t(t^2+1)-t^2.(2t)}{(t^2+1)^2}=\lambda'(t)\frac{t^2}{t^2+1}+\lambda(t)\frac{2t}{(t^2+1)^2}.$$
Ainsi, $y_p$ est une solution de $(E)$ sur $I_1$ si et seulement si pour tout $t>0$,
$$\begin{aligned}t(t^2+1)y_p'(t)-2y_p(t)=t^3(t-1)^2e^{-t} &\iff \lambda'(t).t^3+\lambda(t)\frac{2t^2}{t^2+1}-2\lambda(t)\frac{t^2}{t^2+1}=t^3(t-1)^2e^{-t}\\ &\iff \lambda'(t)=(t-1)^2e^{-t}\end{aligned}$$

ii. Pour qu'une fonction de la forme $f(t)=(\alpha t^2+\beta t+\gamma)e^{-t}$ soit une primitive de $[t\mapsto (t-1)^2e^{-t}$ sur $I_1$, il faut que
$$\forall t>0, \qquad f'(t)=(t-1)^2e^{-t}=(t^2-2t+1)e^{-t}.$$
Or
$$f'(t)=(2\alpha t+\beta)e^{-t}-(\alpha t^2+\beta t+\gamma)e^{-t}=(-\alpha t^2+(2\alpha-\beta)t+\beta-\gamma)e^{-t}$$
Par identification, il faut donc que
$$\left\{\begin{array}{lcl} -\alpha &=& 1\\ 2\alpha-\beta &=& -2\\ \beta-\gamma &=& 1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} \alpha &=& -1\\ \beta &=& 0\\ \gamma &=& -1\end{array}\right.$$

iii. D'après le calcul précédent, une primitive de $[t \mapsto (t-1)^2 e^{-t}]$ est $[t \mapsto -(t^2+1)e^{-t}]$ et $y_p$ est une solution de $(E)$ si

$$\lambda(t) = -(t^2+1)e^{-t}.$$

On en déduit

$$y_p(t) = -(t^2+1)e^{-t}.\frac{t^2}{t^2+1} = -t^2 e^{-t}.$$

Les solutions de $(E)$ sur $I_1$ sont donc les fonctions de la forme

$$y_1 : t \longmapsto \lambda.\frac{t^2}{t^2+1} - t^2 e^{-t}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

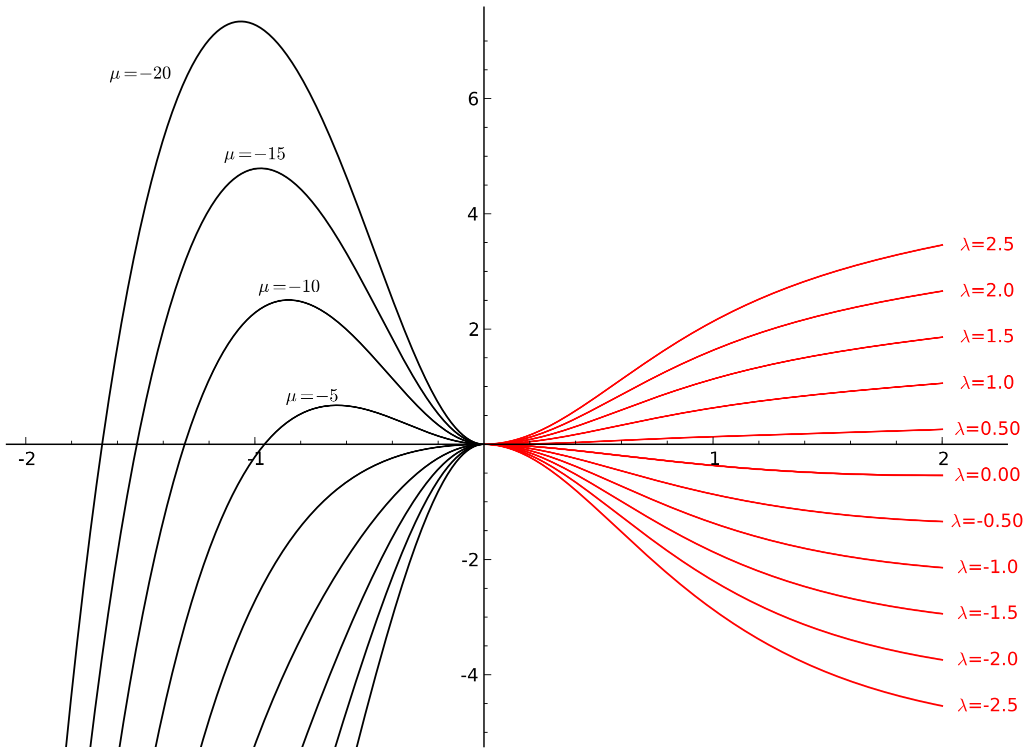
3. Dans les calculs précédents, nous n'avons jamais exploité le fait que $t > 0$. Ces calculs restent donc valables sur $I_2$. Les solutions de $(E)$ sur $I_2$ ont donc exactement la même forme que les solutions de $(E)$ sur $I_1$, soit

$$y_2 : t \longmapsto \mu.\frac{t^2}{t^2+1} - t^2 e^{-t}, \qquad \mu \in \mathbb{R}.$$

4. D'après l'expression trouvée aux questions précédentes, on voit que quelque soient les valeurs de $\lambda$ et $\mu$, on a

$$\lim_{t\to 0^+} y_1(t) = \lim_{t\to 0^-} y_2(t) = 0.$$

Toutes les solutions de $(E)$ sur $I_1$ se prolongent donc en 0 et au delà. D'autre part, on constate que chacune des solutions $y_2$ de $(E)$ sur $I_2$ est un prolongement possible à chacune des solutions $y_1$ sur $I_1$.




⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

**Exercice 2** :

1. Il s'agit d'une équation non linéaire et autonome ; i.e. de la forme $y' = F(y)$ avec $F(X) = X\sin^2(X)$.
2. Les solutions constantes de $(E)$ sont les racines de $F$. Or

$$F(X) = 0 \iff X.\sin^2(X) = 0 \iff X = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

On trouve donc une infinité de solutions constantes (i.e. points fixes) $Y_k : t \mapsto k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

3. (a) Les différentes solutions de $(E)$ ne se croisent jamais.
Ainsi, la fonction nulle étant un point fixe de $(E)$ (correspondant à $k = 0$), c'est la seule solution à s'annuler. Puisque $y_0 \neq 0$, la solution $Y$ ne s'annule jamais. Étant continue, elle reste donc de signe constant. D'autre part, ce signe est exactement le signe de $y_0$.
Par ailleurs, il existe $k_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $k_0\pi < y_0 < (k_0+1)\pi$. La solution $Y$ associée à $y_0$ est donc toute entière coincée entre les deux solutions constantes $Y_{k_0}$ et $Y_{k_0+1}$ :

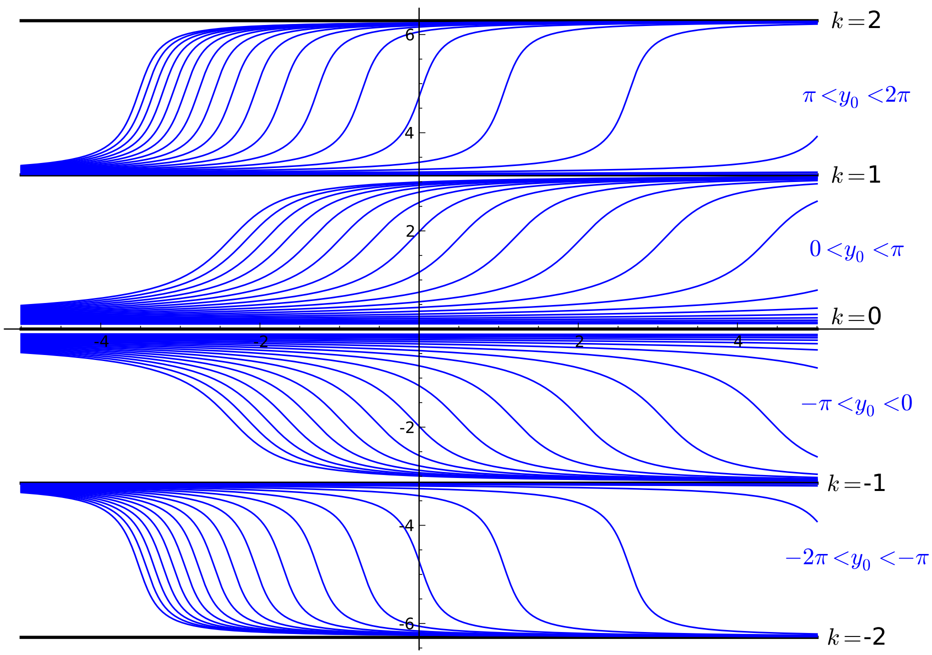
$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad k_0\pi < Y(t) < (k_0+1)\pi.$$

(b) D'après la question précédente, $Y(t)$ est toujours du signe de $y_0$. D'autre part, $Y$ étant solution de $(E)$, on a

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad Y'(t) = Y(t)\sin^2(Y(t))$$

La dérivée $Y'$ est donc toujours du signe de $Y(t)$ et donc de $y_0$. La fonction $Y$ est donc monotone et
- $Y$ est croissante si $y_0 > 0$,
- $Y$ est décroissante si $y_0 < 0$.

(c)




(d) D'après le graphe ci-dessus, on constate que la solution nulle est un point fixe instable et que toutes les autres sont semi-stables (à gauche si $y_0 > 0$ et à droite si $y_0 < 0$).

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

**Exercice 3** :

1. L'équation $(E)$ est une équation différentielle linéaire, d'ordre 2, homogène, à coefficients constants.
2. Le polynôme caractéristique de $(E)$ est

$$P(X) = M.X^2 + \gamma.X + k$$

3. Les solutions de $(E)$ sont non oscillantes si les racines de son polynôme caractéristique sont réelles. Il faut donc que

$$\Delta = \gamma^2 - 4kM \geqslant 0 \Longleftrightarrow \gamma^2 \geqslant 4kM.$$

4. On distingue les cas $\Delta > 0$ et $\Delta = 0$.

(a) Si $\Delta > 0$, les racines de $P(X)$ sont

$$r_1 = \frac{-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 4kM}}{2M} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 4kM}}{2M}$$

et les solutions de $(E)$ sont de la forme

$$y \,:\, t \longmapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}.$$

Or toutes les constantes étant strictement positives, on a clairement $r_1 < 0$. De plus, on a $\gamma^2 - 4kM < \gamma^2$ et $r_2 < 0$ également. Enfin, on constate également que $r_1 < r_2$. Toutes les solutions de $(E)$ tendent donc vers 0 à la vitesse de $e^{r_2 t}$ (qui tend vers 0 le moins vite).

On a donc bien une décroissance exponentielle vers 0.

(b) Si $\Delta = 0$, le polynôme $P(X)$ admet $r_0 = -\frac{\gamma}{2M} < 0$ comme racine double. Les solutions de $(E)$ sont alors de la forme

$$y \,:\, t \longmapsto (\lambda t + \mu)e^{r_0 t}.$$

Là encore, on constate une décroissance exponentielle vers 0 (le facteur $\lambda + \mu t$ n'ayant que peu d'influence sur la vitesse de convergence).

5. Pour que la vitesse de convergence soit la plus rapide possible, il faut que la plus grande des racines trouvées ci-dessus soit le plus petit possible. Or c'est le cas si $\Delta$ le plus petit possible tout en restant strictement positif.

⋆ ⋆
⋆