CONTRÔLE CONTINU

Équations différentielles.

Durée : 1h30 *Les calculatrices sont autorisées.*

Tous les exercices sont indépendants.
Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation.

Exercice 1 Pour $a \in \mathbb{R}$, on note

$$(E_a)\ :\ y'' - (1+a)y' + ay = e^t$$

1. Donner le type de l'équation (E_a).
2. *L'équation homogène* (H_a)
   (a) Donner l'équation homogène (H_a) associée à (E_a) ainsi que son polynôme caractéristique.
   (b) Montrer que les racines du polynôme caractéristique de (H_a) sont a et 1 quelque soit $a \in \mathbb{R}$.
   (c) En déduire l'ensemble des solutions de (H_a), en fonction du paramètre a.
3. *Recherche d'une solution particulière*
   (a) Montrer que (E_a) n'admet pas de solution particulière sous la forme $t \mapsto k.e^t$.
   (b) Montrer que si $a \neq 1$, (E_a) admet une solution particulière sous la forme $t \mapsto k_a.t.e^t$ pour une valeur de $k_a \in \mathbb{R}$ à déterminer.
   (c) Montrer que l'équation (E_1) admet une solution particulière sous la forme $t \mapsto k_1.t^2.e^t$ pour une constante $k_1 \in \mathbb{R}$ à déterminer.
4. Donner, en fonction de a, l'ensemble des solutions de l'équation (E_a).

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 Soit

$$(P)\ :\ \begin{cases} t^2y' + (1-t)y = t & (E) \\ y(1) = 1 & (C.I.) \end{cases}$$

1. Donner le type de l'équation (E).
2. Donner la (les) valeur(s) interdite(s) de (E) ainsi que les intervalles de résolution (on notera I_1 l'intervalle correspondant à la condition initiale $(C.I.)$ donnée).
3. *Résolution sur* I_1
   (a) Donner l'équation homogène (H) associée à (E).
   (b) Déterminer l'ensemble des solutions de (H) sur I_1.

(c) Montrer que (E) admet sur I_1 une solution sous la forme d'un polynôme de degré 1 à déterminer.

(d) En déduire l'ensemble des solutions de (E) sur I_1.

(e) Parmi toutes les solutions de (E) sur I_1, déterminer la solution Y_1 celle qui vérifie également la condition initiale $(C.I.)$.

(f) Montrer que Y_1 se prolonge en $t = 0$ en une fonction continue et donnée la pente de sa tangente à droite en 0.

4. Déterminer l'ensemble des solutions de (E) sur I_2 (on pourra s'inspirer des calculs effectués à la question 3).
5. Montrer que toute solution définie sur I_2 se raccorde à Y_1 en une solution de (E) définie sur $\mathbb{R}$.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 L'évolution d'une population après la chute d'un météorite peut être modélisée par l'équation suivante :

$$(E)\ :\ N' = -kN^2.$$

On note N_0 la population au temps $t = 0$.

1. Quel est le type de cette équation différentielle ?
2. *Étude qualitative*
   (a) Déterminer la fonction F telle que $N' = F(N)$ et tracer son graphe dans un repère $(x, F(x))$.
   (b) Montrer que toutes les solutions de (E) sont décroissantes.
   (c) Déterminer l'unique point fixe de cette équation et montrer qu'il est semi-stable.
   (d) Tracer l'allure des solutions de (E) en fonction de N_0 dans un repère $(t, N(t))$ (on ne considèrera que les parties de courbes correspondant à $t \geqslant 0$).
3. *Résolution exacte*
   (a) En divisant l'équation (E) par N^2, déterminer l'ensemble des solutions de (E).
   (b) Montrer que l'unique solution de (E) vérifiant également $N(0) = N_0$ est

$$N\ :\ t \longmapsto \frac{N_0}{1 + k.N_0.t}$$

   (c) Montrer par le calcul que, selon le signe de N_0, on retrouve bien les différents types de comportements obtenus lors de l'étude qualitative.

⋆ ⋆
⋆

CORRECTION

Exercice 1 :

1. (E_a) est une équation différentielle linéaire, d'ordre 2, à coefficients constants, avec un second membre exponentiel.
2. On a
$$(H_a)\ :\ y'' - (1+a)y' + ay = 0$$
dont le polynôme caractéristique est
$$P(X) = X^2 - (1+a)X + a$$
Le discriminant de P est
$$\Delta = (-(1+a))^2 - 4a = 1 + 2a + a^2 - 4a = 1 - 2a + a^2 = (1-a)^2$$
Les racines de P sont donc
$$\alpha_1 = \frac{(1+a) - \sqrt{(1-a)^2}}{2} = \frac{1+a-|1-a|}{2}$$
et
$$\alpha_2 = \frac{(1+a) + \sqrt{(1-a)^2}}{2} = \frac{1+a+|1-a|}{2}$$
D'un point de vue théorique, il faut distinguer les cas $1-a>0$ et $1-a<0$. Cependant, en pratique, les deux cas se retrouvent dans les deux racines. Ainsi, quitte à renomer les racines, on a
$$\alpha_1 = \frac{(1+a)+(1-a)}{2} = 1 \qquad \text{et} \qquad \alpha_2 = \frac{(1+a)-(1-a)}{2} = a$$
3. Les solutions de (H_a) sont fonctions des racines déterminées à la question précédente ainsi que du nombre de racines distinctes. Ainsi, il faut distinguer les cas $a=1$ et $a \neq 1$:
   - Si $a \neq 1$, le polynôme $P(X)$ admet deux racines distinctes 1 et a. Les solutions de (H_a) sont alors
   $$y_h\ :\ t \longmapsto \lambda e^t + \mu e^{at}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$
   - Si $a=1$, le polynôme $P(X)$ admet une unique racine double $\alpha_0 = 1$. Les solutions de (H_1) sont alors
   $$y_{h,1}\ :\ t \longmapsto (\lambda + \mu t)e^t$$
4. Étant donné la forme du second membre $f(t) = e^t$, on est amenés à chercher une solution particulière y_p à (E_a) sous la forme
$$y_p\ :\ t \longmapsto k.e^t$$
Cependant, en calculant $y_p'(t) = k.e^t$ et $y_p''(t) = k.e^t$, on constate que
$$y_p''(t) - (1+a)y_p'(t) + a.y_p(t) = k.e^t - (1+a).k.e^t + a.k.e^t = 0 \neq e^t$$
L'équation (E_a) n'admet donc pas de solution de la forme cherchée.

5. On suppose ici que $a \neq 1$. On cherche alors y_p sous la forme

$$y_p \,:\, t \longmapsto k.t.e^t$$

On a alors

$$\begin{aligned} y_p'(t) &= k.e^t + k.t.e^t = k.(1+t).e^t \\ y_p''(t) &= k.e^t + k.(1+t).e^t = k.(2+t).e^t \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} y_p''(t) - (1+a)y_p'(t) + a.y_p(t) &= k.(2+\cancel{t}).e^t - (1+a).k.(1+\cancel{t}).e^t + \cancel{a.k.t.e^t} \\ &= (1-a).k.e^t \end{aligned}$$

Ainsi, y_p est solution de (E_a) si $(1-a).k = 1$, soit $k_a = \frac{1}{1-a}$. Donc

$$y_p \,:\, t \longmapsto \frac{t}{1-a}e^t$$

6. Pour $a = 1$, on pose $y_p(t) = k.t^2.e^t$. On a alors

$$\begin{aligned} y_p'(t) &= k.2t.e^t + k.t^2.e^t = k(2t+t^2)e^t \\ y_p''(t) &= k(2+2t)e^t + k(2t+t^2)e^t = k(2+4t+t^2)e^t \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} y_p''(t) - 2y_p'(t) + y_p(t) &= k(2+4t+t^2)e^t - 2.k(2t+t^2)e^t + k.t^2.e^t \\ &= ke^t(2 + \cancel{4t} + \cancel{t^2} - \cancel{4t} - \cancel{2t^2} + \cancel{t^2}) = 2ke^t \end{aligned}$$

La fonction y_p est donc solution de (E) si et seulement si $2k = 1$, soit $k = \frac{1}{2}$. Ainsi,

$$y_p \,:\, t \longmapsto \frac{1}{2}t^2e^t$$

7. D'après les calcul précédents, les solutions de (E_a) sont

$$\begin{cases} y \,:\, t \longmapsto \lambda e^t + \mu e^{at} + \dfrac{t}{1-a}e^t & \text{si} \quad a \neq 1 \\[2ex] y \,:\, t \longmapsto (\lambda + \mu.t)e^t + \dfrac{1}{2}t^2e^t & \text{si} \quad a = 1 \end{cases}$$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 :

1. L'équation (E) est une équation différentielle linéaire, d'ordre 1, à coefficients variables, non homogène.
2. L'unique valeur interdite de (E) est $t = 0$. Les intervalles de résolution sont donc $I_1 = \mathbb{R}^{+*}$ et $I_2 = \mathbb{R}^{-*}$.

3. (a) L'équation homogène (H) associée à (E) est

$$(H)\ :\ t^2y' + (1-t)y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y' = \frac{t-1}{t^2}y = \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2}\right)y$$

(b) Une primitive de $a\ :\ t \mapsto \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2}$ est

$$A\ :\ t \mapsto \ln|t| + \frac{1}{t} = \ln(t) + \frac{1}{t}$$

car $t > 0$. Ainsi, sur I_1, les solutions de (E) sont les fonctions de la forme

$$y_{h1}\ :\ t \longmapsto \lambda e^{\ln t + \frac{1}{t}} \ = \ \lambda.t.e^{\frac{1}{t}}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

(c) Soit $y_p\ :\ t \mapsto at+b$. On a alors $y_p'(t) = a$ et y_p est une solution de (E) si et seulement si

$$\begin{aligned} & t^2y_p'(t) + (1-t)y_p(t) = t \\ \Leftrightarrow\ & at^2 + (1-t)(at+b) = t \\ \Leftrightarrow\ & \cancel{at^2} + at + b - \cancel{at^2} - bt = t \\ \Leftrightarrow\ & (a-b)t + b = t \end{aligned}$$

Par identification, on obtient

$$\left\{\begin{array}{lcl} a-b & = & 1 \\ b & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} a & = & 1 \\ b & = & 0 \end{array}\right.$$

La fonction $y_p\ :\ t \mapsto t$ est donc une solution de (E) sur I_1.

(d) Les solutions de (E) sur I_1 sont donc

$$y\ :\ t \longmapsto \lambda t e^{\frac{1}{t}} + t, \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

(e) Parmi toutes ces solutions, l'unique solution vérifiant en outre $y(1) = 1$ correspond à la constante λ vérifiant l'équation

$$y(1) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda.1.e^1 + 1 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda.e = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 0$$

Ainsi, la fonction cherchée est

$$Y_1 \ :\ \begin{array}{rcl}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & t \end{array}$$

(f) La fonction Y_1 déterminée à la question précédente vérifie $\lim\limits_{t\to 0^+} Y_1(t) = 0$. Cette fonction se prolonge donc en une fonction continue en 0 en posant $Y_1(0) = 0$.
D'autre part, la pente de la tangente à $\mathcal{C}_{Y_1}$ à droite est donnée par la limite

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{Y_1(t) - Y_1(0)}{t-0}$$

Or

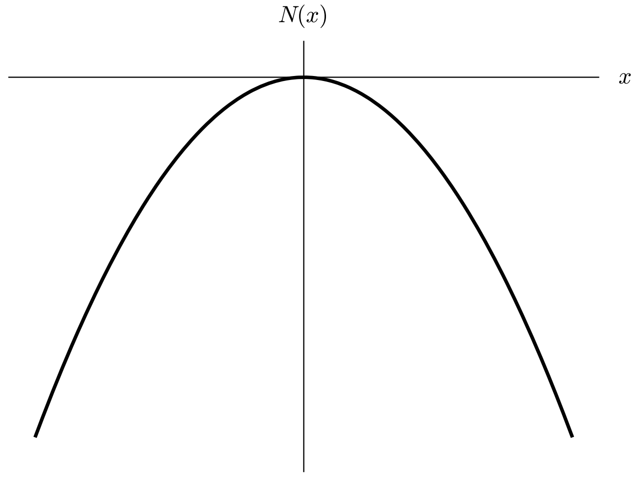
$$\begin{aligned} \frac{Y_1(t) - Y_1(0)}{t-0} &= \frac{Y_1(t)}{t} \\ &= \frac{t}{t} = 1 \\ &\longrightarrow_{t\to 0^+} 1 \end{aligned}$$

4. Lors de la résolution de (E) sur I_1, nous n'avons exploité qu'une seule fois le signe > 0 de la variable t, lors de la résolution de l'équation homogène. Ainsi, sur I_2, une primitive de $a\ :\ t \mapsto \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2}$ est
$$A\ :\ t \mapsto \ln|t| + \frac{1}{t} = \ln(-t) + \frac{1}{t}$$
car $t < 0$. Les solutions de (E) sur I_2 sont donc les fonctions de la forme
$$y_{h2}\ :\ t \longmapsto \lambda_2 e^{\ln(-t)+\frac{1}{t}} \ = \ -\lambda_2.t.e^{\frac{1}{t}} \ = \ \mu.t.e^{\frac{1}{t}}, \quad \mu \in \mathbb{R}$$
D'autre part, la fonction
$$\begin{array}{rccc} Y_2 & : &]-\infty, 0[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & t & \longmapsto & t \end{array}$$
est encore une solution particulière de (E) sur I_2. L'ensemble des solutions de (E) sur I_2 est donc
$$y\ :\ t \longmapsto \mu t e^{\frac{1}{t}} + t, \qquad \mu \in \mathbb{R}$$
5. Puisque $\frac{1}{t} \to -\infty$ lorsque $t \to 0^-$, toute solution y de (E) sur I_2 vérifie
$$\lim_{t \to 0^-} y(t) = 0 \ (= Y_1(t))$$
Ainsi, toute solution de (E) sur I_2 se prolonge en 0 en une fonction continue en posant $y(0) = 0$ et se raccorde ainsi à Y_1. Pour que ce raccordement produise une solution de (E) sur $\mathbb{R}$, il faut que le "recollement" soit dérivable. Or
$$\begin{aligned} \frac{y(t) - y(0)}{t - 0} &= \frac{\mu t e^{\frac{1}{t}} + t}{t} \\ &= \mu e^{\frac{1}{t}} + 1 \\ &\xrightarrow[t \to 0^+]{} 1 \end{aligned}$$
Ainsi, toute solution y de (E) sur I_2 admet en 0 la même pente que Y_1. Le recollement est donc bien dérivable est toute fonction de la forme
$$Y\ :\ t \longmapsto \begin{cases} t & \text{si} \quad t \geqslant 0 \\ \mu.t.e^{\frac{1}{t}} + t & \text{si} \quad t < 0 \end{cases} \qquad \mu \in \mathbb{R}$$
est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

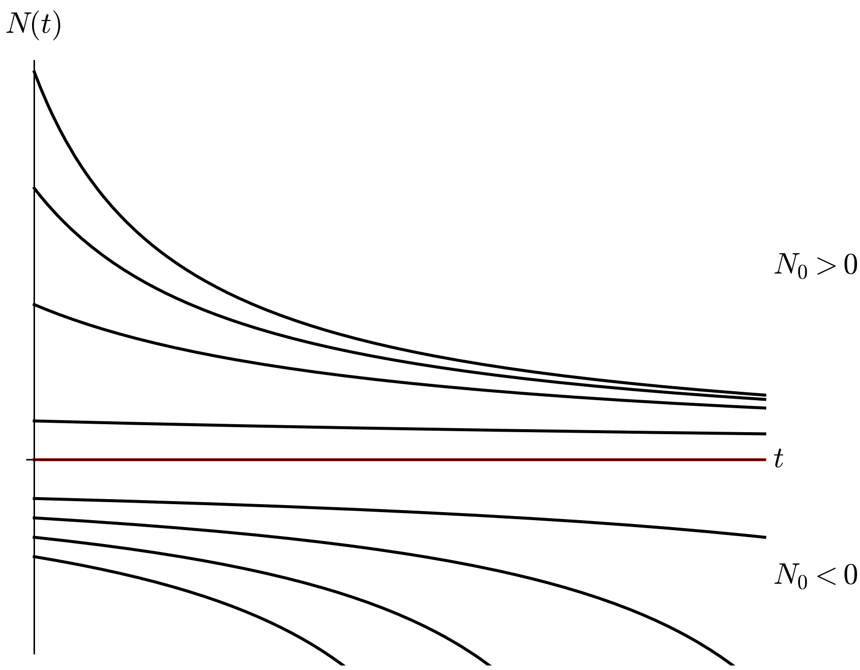
⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 :

1. Il s'agit ici d'une équation autonome.
2. La fonction F définissant (E) est $F\ :\ x \mapsto -kx^2$.



3. D'après le graphe ci-dessus, la fonction F est négative. Donc toute solution y de (E) vérifie
$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad y'(t) = F(y(t)) \leqslant 0$$
Donc toute solution de (E) est décroissante.
4. Les points fixes de (E) sont les constantes solutions de l'équation $F(x) = 0$, soit, ici $x = 0$. De plus, ici $F'(x) = -2kx$ donc $F'(0) = 0$. Cela ne nous permet pas de déterminer la nature de ce point fixe. Cependant, puisque toutes les solutions de (E) sont décroissantes, si $y(0) > 0$, alors y décroit vers 0 et se rapproche de 0. Réciproquement, si $y(0) < 0$, alors y décroit et s'éloigne de 0. C'est donc un point fixe semi-stable.
5.



6. En divisant l'équation (E) par N^2, on obtient
$$N' = -kN^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{N'}{N^2} = -k$$

On reconnaît à gauche la dérivées de $-\frac{1}{N}$, d'où

$$\begin{aligned}(E) \quad &\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{N(t)} = -kt + \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \quad \boxed{N(t) = \frac{1}{kt - \lambda}, \quad \lambda \in \mathbb{R}}\end{aligned}$$

7. L'unique solution de (E) vérifiant la condition initiale $N(0) = N_0$ est donnée par la valeur de $\lambda \in \mathbb{R}$ vérifiant

$$\frac{1}{-\lambda} = N_0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = -\frac{1}{N_0}$$

Ainsi, l'unique fonction cherchée est

$$N \,:\, t \longmapsto \frac{1}{kt - \frac{-1}{N_0}} = \frac{N_0}{k.N_0.t + 1}$$

8. D'après l'expression précédente,
   - Si $N_0 = 0$, la fonction nulle est une solution constante.
   - Si $N_0 > 0$, alors $N(t)$ existe pour tout $t \geqslant 0$ et tend vers 0 en $+\infty$.
   - Si $N_0 < 0$, l'équation $kN_0 t + 1 = 0$ admet comme solution $t = -\frac{1}{kN_0} > 0$. La solution associée à N_0 "explose" donc vers $-\infty$ en un temps fini.

⋆ ⋆
⋆