CONTRÔLE CONTINU

Équations différentielles.

Durée : 1h30 *Les calculatrices sont autorisées.*

Tous les exercices sont indépendants.
Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation.

Exercice 1 Soit $m \in \mathbb{R}$ un paramètre réel. On note

$$(E_m)\ :\ y'' + 2my' + y = 4$$

1. Donner la nature de l'équation (E_m).

2. *L'équation homogène*
   (a) Donner l'équation homogène (H_m) associée à (E_m) ainsi que son polynôme caractéristique $P_m(X)$.
   (b) Déterminer les valeurs de m pour lesquelles les solutions de (H_m) présentent un caractère oscillant.
   (c) Pour quelles valeurs de m ces oscillations sont-elles amorties ? Justifier.
   (d) Déterminer, en fonction de m, l'ensemble des solutions de l'équation (H_m).
   On pourra le cas échéant, utiliser les notations suivantes :

$$\alpha_1 = -m + \sqrt{m^2 - 1}, \qquad \alpha_2 = -m - \sqrt{m^2 - 1}, \qquad \omega = \sqrt{1 - m^2}$$

3. *Une solution particulière*
   Montrer que l'équation (E_m) admet une solution constante à déterminer.

4. Donner, en fonction de m l'ensemble des solutions de (E_m).

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 Soit

$$(E)\ :\ ty' - 2y = t^2$$

1. Déterminer les intervalles de résolution I_1 et I_2 de (E).
2. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée à (E) sur chacun des intervalles de résolution.

3. Déterminer, à l'aide de la méthode de variation de la constante, une solution particulière de (E) sur chacun des intervalles de résolution et donner l'ensemble des solutions de (E).
4. Montrer que toute solution y_1 de (E) sur I_1 se prolonge de façon continue en 0 et se raccorde à n'importe quelle solution y_2 de (E) sur I_2 pour former une solution de (E) définie sur $\mathbb{R}$.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 Soient

$$F\,:\,x \longmapsto x - x^2 \qquad \text{et} \qquad (E)\,:\,y' = F(y)$$

1. *Étude qualitative*
   (a) Dresser le tableau de signe de la fonction F et déterminer les points fixes de (E).
   (b) Donner le sens de variations d'un solution y de (E) en fonction de sa valeur en 0 et tracer l'allure de quelques unes des solutions de (E).
   (c) En déduire graphiquement la nature de chacun des points fixes de (E).
   (d) Retrouver la nature de ces points fixes par le calcul.

2. *Résolution exacte*
   (a) Montrer que si y est une solution de (E), alors la fonction $z\,:\,t \mapsto \frac{1}{y(t)}$ est solution de l'équation
   $$(E')\,:\,z' + z = 1$$
   (b) Déterminer l'ensemble des solutions de (E') et en déduire l'ensemble des solutions de (E).
   (c) Soit $y_0 \in \mathbb{R}$. Montrer que l'unique solution de (E) vérifiant la condition initiale $y(0) = y_0$ est
   $$y\,:\,t \longmapsto \frac{y_0}{(1-y_0)e^{-t} + y_0}$$
   (d) Montrer que si $y_0 \geqslant 0$, le comportement asymptotique de la fonction y associé est en cohérence avec l'étude qualitative effectuée à la question 1.

⋆ ⋆
⋆

CORRECTION

Exercice 1 :

1. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2, non homogène, à coefficients constants.
2. (a) $(H_m)\ :\ y'' + 2my' + y = 0$ et $P_m(X) = X^2 + 2mX + 1$.

   (b) Le discriminant de $P_m(X)$ est
   $$\Delta_m = 4m^2 - 4 = 4(m-1)(m+1)$$
   Les solution de (H_m) sont oscillantes si et seulement si $\Delta_m < 0$, i.e. si $|m| < 1$.

   (c) Si $|m| < 1$, les racines complexes de $P_m(X)$ sont
   $$\alpha_1 = \frac{-2m + i\sqrt{4-4m^2}}{2} = -m + i\sqrt{1-m^2} \qquad \text{et} \qquad \alpha_2 = \overline{\alpha_1}$$
   Les oscillations des solutions sont alors amorties si et seulement si la partie réelle $-m$ commune à ces deux racines est strictement positive, i.e. si $0 < m < 1$.

   (d) • Si $|m| > 1$, $\Delta_m > 0$ et polynôme $P_m(X)$ admet deux racines réelles distinctes
   $$\alpha_1 = -m + \sqrt{m^2-1} \qquad \text{et} \qquad \alpha_2 = -m - \sqrt{m^2-1}$$
   Les solutions de (H_m) sont alors toutes les fonctions de la forme
   $$y_h\ :\longmapsto \lambda.e^{\alpha_1 t} + \mu.e^{\alpha_2 t}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$
   • Si $|m| = 1$, $\Delta_m = 0$ et le polynôme $P_m(X) = (X+m)^2$. Les solutions de (H_m) sont alors toutes les fonctions de la forme
   $$y_h\ :\longmapsto (\lambda + \mu t).e^{-mt}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$
   • Si $|m| < 1$, d'après l'étude précédente, en posant $\omega = \sqrt{1-m^2}$, les solutions de (H_m) sont les fonctions de la forme
   $$y_h\ :\longmapsto e^{-mt}.(\lambda.\cos(\omega t) + \mu.\sin(\omega t)), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$
3. La fonction constante égale à 4 est solution de (E_m). En effet, toutes ses dérivées sont nulles et elle vérifie alors l'équation (E_m).
4. Les solutions de (E_m) sont alors

$$\Sigma = \{y\ :\ t \mapsto \lambda.e^{\alpha_1 t} + \mu.e^{\alpha_2 t} + 4, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} \qquad \text{si } |m| > 1$$

$$\Sigma = \{y\ :\ t \mapsto (\lambda + \mu t).e^{-mt} + 4, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} \qquad \text{si } |m| = 1$$

$$\Sigma = \{y\ :\ t \mapsto e^{-mt}.(\lambda.\cos(\omega t) + \mu.\sin(\omega t)) + 4, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} \qquad \text{si } |m| < 1$$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 :

1. L'unique valeur interdite de (E) est $t=0$. Les intervalles de résolution de (E) sont donc

$$I_1 =]-\infty, 0[\qquad \text{et} \qquad I_2 =]0, +\infty[$$

2. L'équation homogène associée à (E) est

$$\begin{aligned}(H)\ :\ ty' - 2y = 0 &\Longleftrightarrow \frac{y'}{y} = \frac{2}{t}\\ &\Longleftrightarrow \ln(|y_h(t)|) = 2\ln|t| + K = \ln(t^2) + K, \quad K \in \mathbb{R}\\ &\Longleftrightarrow y_h(t) = \lambda.t^2, \quad \lambda \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Les solutions de (H) sont donc

$$\Sigma_{h1} = \{y_{h1}\ :\ t \mapsto \lambda_1.t^2, \quad \lambda_1 \in \mathbb{R}\} \qquad \text{sur } I_1$$

$$\Sigma_{h2} = \{y_{h2}\ :\ t \mapsto \lambda_2.t^2, \quad \lambda_2 \in \mathbb{R}\} \qquad \text{sur } I_2$$

3. Sur chaque intervalle de résolution, on cherche une solution particulière de (E) sous la forme $y_p\ :\ t \mapsto \lambda(t).t^2$. On a alors

$$y_p'(t) = \lambda'(t).t^2 + 2t.\lambda(t)$$

La fonction y_p est alors solution de (E) si et seulement si

$$\begin{aligned}&\lambda'(t).t^3 + \cancel{2t^2\lambda(t)} - \cancel{2t^2\lambda(t)} = t^2\\ \Longleftrightarrow\ &\lambda'(t) = \frac{1}{t}\\ \Longrightarrow\ &\lambda(t) = \ln|t| = \begin{cases}\ln(-t) & \text{sur } I_1\\ \ln(t) & \text{sur } I_2\end{cases}\end{aligned}$$

Ainsi,
- la fonction $y_{p1}\ :\ t \mapsto t^2\ln(-t)$ est alors une solution de (E) sur I_1,
- la fonction $y_{p2}\ :\ t \mapsto t^2\ln(t)$ est alors une solution de (E) sur I_2.

Les solutions de (E) sont alors

$$\Sigma_1 = \{y_1\ :\ t \mapsto t^2.(\lambda_1 + \ln(-t)), \quad \lambda_1 \in \mathbb{R}\} \quad \text{sur } I_1$$

$$\Sigma_2 = \{y_2\ :\ t \mapsto t^2.(\lambda_2 + \ln(t)), \quad \lambda_2 \in \mathbb{R}\} \qquad \text{sur } I_2$$

4. Soit Y une solution de (E) sur $\mathbb{R}$. D'après l'équation, si Y est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$, alors $Y(0) = 0$.
Par ailleurs, Y doit coïncider sur I_1 avec une fonction y_1 de l'ensemble Σ_1 et sur I_2 avec une fonction y_2 de l'ensemble Σ_2. Or par croissances comparées, toute fonction $y_1 \in \Sigma_1$ vérifie

$$\lim_{t\to 0^-} y_1(t) = \lim_{t\to 0^-} \lambda_1.t^2 + t^2\ln(-t) = 0$$

et toute fonction $y_2 \in \Sigma_2$ vérifie

$$\lim_{t\to 0^+} y_2(t) = \lim_{t\to 0^+} \lambda_2.t^2 + t^2\ln(t) = 0$$

La fonction Y est alors continue en 0 pour toutes valeurs de λ_1 et λ_2.
Enfin, pour que Y soit une solution de (E) sur $\mathbb{R}$, elle doit être dérivable sur $\mathbb{R}$ et en particulier en 0. Or

$$\forall t < 0, \quad \frac{Y(t) - Y(0)}{t - 0} = t.(\lambda_1 + \ln(-t)) \underset{t \to 0^-}{\longrightarrow} 0 \quad \forall \lambda_1 \in \mathbb{R}$$

et

$$\forall t > 0, \quad \frac{Y(t) - Y(0)}{t - 0} = t.(\lambda_2 + \ln(t)) \underset{t \to 0^+}{\longrightarrow} 0 \quad \forall \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

Ainsi, pour toutes valeurs de λ_1 et λ_2, la fonction Y est dérivable en 0 et sa dérivée est nulle. cqfd.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 :

1. (a) $F(x) = x - x^2 = x(1-x)$. D'où

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$F(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Les points fixes de (E) sont donc $x_1^* = 0$ et $x_2^* = 1$.

(b) D'après le tableau ci-dessus, chaque solution y de (E) est

- décroissante si $y(0) < 0$,
- constante égale à 0 si $y(0) = 0$,
- croissante si $0 < y(0) < 1$,
- constante égale à 1 si $y(0) = 1$,
- décroissante si $y(0) > 1$.

(c) D'après le graphe, le point fixe $x_1^* = 0$ semble être instable alors que le point fixe $x_2^* = 1$ semble être stable.

(d) Puisque $F'(x) = 1 - 2x$, l'analyse graphique est correcte puisque

- $F'(x_1^*) = F'(0) = 1 > 0$ donc x_1^* est instable.
- $F'(x_2^*) = F'(1) = -1 < 0$ donc x_2^* est stable.

2. (a) Si $z(t) = \frac{1}{y(t)}$, alors $y(t) = \frac{1}{z(t)}$ et $y'(t) = -\frac{z'(t)}{z^2(t)}$. Mais alors, si y est une solution de (E), on a

$$y' = y - y^2 \iff -\frac{z'}{z^2} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} \underset{\times z^2}{\iff} -z' = z - 1 \iff z' + z = 1$$

(b) L'équation (E') est linéaire, d'ordre 1, à coefficients constants et de second membre constant. Les solutions de l'équations (H') sont les fonctions de la forme

$$z_h : t \mapsto \lambda.e^{-t}$$

pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et la fonction constante égale à 1 est une solution particulière de (E'). Les solutions de (E') sont donc les fonctions de la forme

$$z : t \longmapsto \lambda.e^{-t} + 1, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Puisque $y = \frac{1}{z}$, les solutions de (E) sont alors les fonctions de la forme

$$y : \longmapsto \frac{1}{\lambda.e^{-t} + 1}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

(c) D'après la question précédente, l'unique solution de (E) vérifiant en outre la condition initiale $y(0) = y_0$ est associée à la constante $\lambda \in \mathbb{R}$ vérifiant

$$\frac{1}{\lambda + 1} = y_0 \iff \lambda = \frac{1}{y_0} - 1$$

L'unique solution cherchée est donc

$$y : t \longmapsto \frac{1}{\left(\frac{1}{y_0} - 1\right).e^{-t} + 1} = \frac{y_0}{(1 - y_0)e^{-t} + y_0}$$

(d) On suppose ici que $y_0 \geqslant 0$ et l'on note $y : t \mapsto \frac{y_0}{(1-y_0)e^{-t}+y_0}$.
On note pour commencer que si $y_0 = 0$, alors $y(t) = 0$ pour tout t. De même, si $y_0 = 1$, alors

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad y(t) = \frac{1}{(1-1)e^{-t} + 1} = 1$$

On retrouve donc les solutions constantes déterminées lors de l'étude qualitative.
Par ailleurs, si $y_0 > 1$, alors $1 - y_0 < 0$ et $(1 - y_0)e^{-t} + y_0 < y_0$. Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $y(t) > 1$ et $\lim\limits_{t \to 1^+} y(t) = \dfrac{y_0}{y_0} = 1$.
De même, si $0 < y_0 < 1$, alors $1 - y_0 > 0$ et $(1 - y_0)e^{-t} + y_0 > y_0$. Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $y(t) < 1$ et $\lim\limits_{t \to 1^-} y(t) = \dfrac{y_0}{y_0} = 1$.

⋆ ⋆
⋆