CONTRÔLE CONTINU

Équations différentielles.

Durée : 1h30 *Les calculatrices sont autorisées.*

Tous les exercices sont indépendants.
Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation.

Exercice 1 *En roues libres*

Une voiture de masse m roule en ligne droite à la vitesse constante v_0. À l'instant $t = 0$, elle coupe son moteur et n'est plus alors soumise qu'à une force de frottement $\overrightarrow{F} = -\alpha\overrightarrow{v}$ proportionnelle à sa vitesse $\overrightarrow{v}$ et opposée à son déplacement.

Pour la mise en équation, suppose que la droite sur laquelle se déplace la voiture est l'axe des abscisses, dont l'origine est située au point où la voiture coupe son moteur et l'on note $x(t)$ la position de la voiture sur cet axe à l'instant t.

1. Appliquer le Principe Fondamental de la Dynamique à la voiture et déterminer un problème de Cauchy linéaire et d'ordre 2 dont l'unique solution est la fonction x donnant la position de la voiture à chaque instant.
2. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation issue du problème de Cauchy.
3. Déterminer l'unique solution du problème de Cauchy en fonction de α, v_0, m et t.
4. Déterminer la distance totale parcourue par la voiture en roues libres.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 Pour tout réel $m \in \mathbb{R}$, on note (E_m) l'équation différentielle

$$(E_m)\ :\ y'' - (m+1)y' + my = -t - 1$$

1. Donner le type de l'équation (E_m).
2. *L'équation homogène* (H_m)
   (a) Donner l'équation homogène (H_m) associée à (E_m) son polynôme caractéristique $P_m(X)$.
   (b) Montrer que le discriminant de $P_m(X)$ est
   $$\Delta_m = (m-1)^2$$
   (c) Donner, selon les valeurs de $m \in \mathbb{R}$, l'ensemble Σ_h des solutions de (H_m).

3. Montrer que quelque soit $m \in \mathbb{R}$, l'équation (E_m) admet une solution polynomiale à déterminer.
4. Donner, selon les valeurs de m, l'ensemble des solutions de (E_m).

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 L'objectif de cet exercice est de déterminer l'ensemble des solutions de l'équation

$$(E)\ :\ ty' - y - ty^2 = -9t^3$$

définies sur $]0, +\infty[$.

1. Donner le type de l'équation différentielle (E).
2. Montrer que (E) admet une solution particulière y_p de la forme $y_p\ :\ t \mapsto at$ où a est une constante positive à déterminer.
3. Montrer que si y est une solution de (E) autre que y_p, alors la fonction z définie par

   $$z = \frac{1}{y - y_p}$$

   est solution de l'équation différentielle

   $$(E')\ :\ tz' + (6t^2 + 1)z = -t$$

4. *Résolution de* (E')
   (a) Donner la nature de l'équation (E').
   (b) Déterminer les valeurs interdites de (E') et ses intervalles de résolution.
   (c) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (H') associée à (E'), définies sur $]0, +\infty[$.
   (d) i. Montrer que (E') admet une solution z_p de la forme

   $$z_p\ :\ t \longmapsto \frac{\lambda(t).e^{-3t^2}}{t}$$

   si et seulement si

   $$\lambda'(t) = -te^{3t^2}$$

   ii. En déduire une solution particulière z_p de (E').
   (e) Donner l'ensemble des solutions de (E').
5. Donner l'ensemble des solutions de (E) définies sur $]0, +\infty[$.

⋆ ⋆
⋆

CORRECTION

Exercice 1 :

1. Une fois qu'elle a coupé son moteur, la voiture est soumise à chaque instant $t \geqslant 0$

   - son poids $\overrightarrow{P}$,
   - la réaction de la route $\overrightarrow{R} = -\overrightarrow{P}$,
   - la force de frottement $\overrightarrow{F}(t) = -\alpha.\overrightarrow{v}(t)$.

   Le Principe Fondamental de la Dynamique assure alors que, à chaque instant

   $$m\,\overrightarrow{a}(t) = \cancel{\overrightarrow{P}} + \cancel{\overrightarrow{R}} + \overrightarrow{F}(t) = -\alpha\,\overrightarrow{v}(t)$$

   où $\overrightarrow{a}(t)$ représente le vecteur accélération de la voiture.

   Projeté sur l'axe des abscisses (la route), cette équation devient

   $$(E)\ :\ m.x'' = -\alpha x' \iff mx'' + \alpha x' = 0$$

   Par ailleurs, par hypothèse, on a également $x(0) = 0$ et $v(0) = x'(0) = v_0$. Le problème peut alors être modélisé par le problème de Cauchy suivant :

   $$\boxed{(P)\ :\ \begin{cases} mx'' + \alpha x' = 0 & (E) \\ \\ x(0) = 0,\ x'(0) = v_0 & (C.I.) \end{cases}}$$

2. L'équation (E) du problème ci-dessus, est une équation différentielle linéaire, homogène, d'ordre 2, à coefficients constants. L'ensemble de ses solutions s'exprime donc à l'aide des racines de son polynôme caractéristique

   $$P(X) = mX^2 + \alpha X = X(mX + \alpha)$$

   Les racines de $P(X)$ sont

   $$r_1 = 0 \qquad \text{et} \qquad r_2 = -\frac{\alpha}{m}$$

   donc l'ensemble des solutions de (E) est

   $$\Sigma = \{y\ :\ t \longmapsto \lambda + \mu.e^{-\frac{\alpha}{m}t},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

3. Pour déterminer l'unique solution de (P), on doit donc déterminer le couples de constantes (λ, μ) associé aux conditions initiales $(C.I.)$. Or, si x est une solution de (E), on a d'une part

   $$x(0) = \lambda + \mu$$

   et d'autre part

   $$x'(t) = -\mu\frac{\alpha}{m}e^{-\frac{\alpha}{m}t} \quad \text{donc} \quad x'(0) = -\mu\frac{\alpha}{m}$$

Ainsi, la solution x vérifie les conditions initiales $(C.I.)$ si et seulement si

$$\left\{\begin{array}{rcl}\lambda+\mu & = & 0 \\ -\mu\dfrac{\alpha}{m} & = & v_0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\mu = -\dfrac{mv_0}{\alpha} \\ \lambda = -\mu = \dfrac{mv_0}{\alpha}\end{array}\right.$$

À chaque instant $t \geqslant 0$, la position $x(t)$ de la voiture est alors donnée par

$$\boxed{x(t) = \frac{mv_0}{\alpha}\left(1 - e^{-\frac{\alpha}{m}t}\right)}$$

4. La distance totale parcourue par la voiture en roues libres est obtenue en passant à la limite $t \to +\infty$ dans l'expression $x(t)$. D'où

$$\boxed{d_{\text{tot}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{mv_0}{\alpha}\left(1 - e^{-\frac{\alpha}{m}t}\right) = \frac{mv_0}{\alpha}}$$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 :

1. Pour tout $m \in \mathbb{R}$, l'équation (E_m) est linéaire, d'ordre 2, à coefficients constants, avec un second membre polynomial.
2. (a) L'équation (H_m) est

$$(H_m) \;:\; y'' - (m+1)y' + my = 0$$

et son polynôme caractéristique est

$$P_m(X) = X^2 - (m+1)X + m$$

(b) Le discriminant de $P_m(X)$ est

$$\Delta_m = (m+1)^2 - 4m = m^2 + 2m + 1 - 4m = m^2 - 2m + 1 = (m-1)^2$$

(c) D'après le calcul précédent, on voit que pour toute valeur de m, on a $\Delta_m \geqslant 0$. On distingue donc deux cas :

- Si $m \neq 1$, on a $\Delta_m > 0$. Le polynôme $P_m(X)$ admet donc deux racines distinctes :

$$r = \frac{(m+1) \pm \sqrt{\Delta_m}}{2} = \frac{(m+1) \pm (m-1)}{2}$$

d'où

$$r_1 = 1, \qquad r_2 = m$$

Dans ce cas, l'ensemble des solutions de (H_m) est

$$\Sigma_{h,m} = \left\{y_h \;:\; t \longmapsto \lambda e^t + \mu e^{mt}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\}$$

- Si $m = 1$, on a $\Delta_1 = 0$. Le polynôme $P_1(X)$ admet donc une unique racine double :
$$r_0 = 1$$
Dans ce cas, l'ensemble des solutions de l'équation (H_1) est alors
$$\Sigma_{h,1} = \{y_h \,:\, t \longmapsto (\lambda + \mu t)e^t, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

3. Le second membre de l'équation (E_m) est un polynôme de degré 1. On cherche donc une solution particulière à (E_m) sous la forme
$$y_p \,:\, t \longmapsto at + b$$
On a alors $y_p'(t) = a$, $y_p''(t) = 0$ et
$$y_p''(t) - (m+1)y_p'(t) + my_p(t) = -(m+1).a + m(at+b) = mat - ma + mb - a$$
La fonction y_p est donc une solution de (E_m) si et seulement si, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a
$$mat - ma + mb - a = -t - 1$$
Par identification, on obtient le système suivant :
$$(S_m) \,:\, \left\{\begin{array}{lcl} ma & = & -1 \\ -ma + mb - a & = & -1 \end{array}\right.$$
On constate ici qu'il faut distinguer les cas $m = 0$ et $m \neq 0$. Ainsi,

- Si $m \neq 0$, on a
$$(S_m) \;\Leftrightarrow\; \left\{\begin{array}{lclclcl} a & = & -\dfrac{1}{m} & & & & \\ & & & & & & \\ b & = & \frac{1}{m}(ma + a - 1) & = & \frac{1}{m}\left(-2 - \frac{1}{m}\right) & = & -\frac{2m+1}{m^2} \end{array}\right.$$
La fonction
$$y_p \,:\, t \longmapsto -\frac{1}{m}t - \frac{2m+1}{m^2}$$
est donc une solution de (E_m).

- Si $m = 0$, le système (S_0) n'admet pas de solution. Le système (E_0) n'admet donc aucune solution affine. On cherche alors une solution y_p sous la forme
$$y_p(t) = at^2 + bt$$
On a alors
$$y_p'(t) = 2at + b \qquad \text{et} \qquad y_p''(t) = 2a$$
et y_p est une solution de (E_0) si et seulement si
$$\begin{aligned} y_p'' - y_p' = -t - 1 \;&\Leftrightarrow\; 2a - 2at - b = -t - 1 \\ &\Leftrightarrow\; -2at + (2a - b) = -t - 1 \end{aligned}$$

Par identification, on obtient le système

$$\begin{cases} -2a & = & -1 \\ 2a-b=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a & = & \dfrac{1}{2} \\ b & = & -1-2a & = & -2 \end{cases}$$

La fonction

$$y_p \,:\, t \longmapsto \frac{1}{2}t^2 - 2t$$

est donc une solution de l'équation (E_0).

4. On distingues trois cas :

   - Si $m \notin \{0,1\}$, l'ensemble des solutions de (E_m) est

   $$\Sigma_m = \left\{ y \,:\, t \longmapsto \lambda e^t + \mu e^{mt} - \frac{1}{m}t - \frac{2m+1}{m^2},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

   - L'ensemble des solutions de l'équation (E_0) est

   $$\Sigma_0 = \left\{ y \,:\, t \longmapsto \lambda e^t + \mu + \frac{1}{2}t^2 - 2t,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

   - L'ensemble des solutions de (E_1) est

   $$\Sigma_1 = \left\{ y \,:\, t \longmapsto (\lambda + \mu t)e^t - t - 3, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 :

1. L'équation (E) est une équation différentielle non linéaire, d'ordre 1 et non homogène.
2. On pose $y_p(t) = at$, $a \in \mathbb{R}$. On a alors $y_p'(t) = a$ et y_p est une solution de (E) sur $]0, +\infty[$ si et seulement si pour tout $t > 0$, on a

   $$ty_p'(t) - y_p(t) - ty_p(t)^2 = -9t^3 \iff \cancel{at} - \cancel{at} - a^2t^3 = -9t^3$$

   On peut donc prendre $a = 3$ et la fonction $y_p \,:\, t \mapsto 3t$ est une solution de (E).

3. Soient y une solution de (E) et z la fonction définie pour tout $t > 0$ par

   $$z(t) = \frac{1}{y(t) - y_p(t)} = \frac{1}{y(t) - 3t}$$

   On a alors

   $$y(t) = 3t + \frac{1}{z(t)} \qquad \text{et} \qquad y'(t) = 3 - \frac{z'(t)}{z^2(t)}$$

et y étant une solution de (E), on a, pour tout $t > 0$,

$$\begin{aligned}
ty' - y - ty^2 = -9t^3 &\iff t\left(3 - \frac{z'}{z^2}\right) - \left(3t + \frac{1}{z}\right) - t\left(3t + \frac{1}{z}\right)^2 = -9t^3 \\
&\iff \cancel{3t} - \frac{tz'}{z^2} - \cancel{3t} - \frac{1}{z} - \cancel{9t^3} - \frac{6t^2}{z} - \frac{t}{z^2} = -\cancel{9t^3} \\
&\underset{\times z^2}{\iff} -tz' - z - 6t^2 z - t = 0 \\
&\iff \boxed{tz' + (6t^2+1)z = -t}
\end{aligned}$$

4. (a) L'équation (E') est une équation différentielle linéaire d'ordre 1, non homogène et à coefficients non constants.

   (b) L'équation (E') admet pour unique valeur interdite $t = 0$. Les intervalles de résolution sont donc $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$. Par hypothèse, on se contente d'étudier cette équation sur $]0, +\infty[$.

   (c) L'équation homogène associée à (E') est

$$\begin{aligned}
(H') \,:\, tz' + (6t^2+1)z = 0 &\iff \frac{z'}{z} = -6t - \frac{1}{t} \\
&\iff \ln|z(t)| = -3t^2 - \ln(t) + k \quad \text{car } t > 0 \\
&\iff z(t) = \frac{\lambda . e^{-3t^2}}{t}, \quad \lambda = \pm e^k \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

   Les solutions de l'équation (H') sur $]0, +\infty[$ sont donc

$$\Sigma_h = \left\{ z_h \,:\, t \longmapsto \frac{\lambda . e^{-3t^2}}{t}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

   (d) i. On pose

$$z_p(t) = \frac{\lambda(t) e^{-3t^2}}{t}$$

   Pour calculer $z_p'(t)$, on pose

$$v(t) = \frac{e^{-3t^2}}{t}$$

   et l'on a alors

$$v'(t) = \frac{-6t^2 e^{-3t^2} - e^{-3t^2}}{t^2} = -\frac{6t^2+1}{t^2} e^{-3t^2}$$

   et

$$z_p'(t) = \lambda'(t) \frac{e^{-3t^2}}{t} - \lambda(t) \frac{6t^2+1}{t^2} e^{-3t^2}$$

   La fonction z_p est donc une solution de (E') si et seulement si

$$\begin{aligned}
tz_p' + (6t^2+1)z_p = -t &\Leftrightarrow \lambda'(t) e^{-3t^2} - \cancel{\lambda(t) \frac{6t^2+1}{t} e^{-3t^2}} + \cancel{(6t^2+1).\lambda(t) \frac{e^{-3t^2}}{t}} = -t \\
&\Leftrightarrow \boxed{\lambda'(t) = -te^{3t^2}}
\end{aligned}$$

ii. Une primitive de la fonction $\lambda' \,:\, t \mapsto -te^{3t^2}$ est

$$\lambda \,:\, t \mapsto -\frac{1}{6}e^{3t^2}$$

D'après les calculs précédents, la fonction

$$z_p \,:\, t \longmapsto -\frac{1}{6t}$$

est donc une solution de (E') sur $]0,+\infty[$.

(e) L'ensemble des solutions de (E') sur $]0,+\infty[$ est

$$\begin{aligned} \Sigma' &= \left\{ z \,:\, t \longmapsto \frac{\lambda.e^{-3t^2}}{t} - \frac{1}{6t}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ z \,:\, t \longmapsto \frac{\mu.e^{-3t^2} - 1}{6t}, \quad \mu \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

5. Puisque les fonction y et z sont liées par la relation $y(t) = 3t + \frac{1}{z(t)}$, les solutions de (E) sur $]0,+\infty[$ sont donc les fonctions de la forme

$$\boxed{y \,:\, t \longmapsto 3t + \frac{6t}{\mu.e^{-3t^2} - 1}, \quad \mu \in \mathbb{R}}$$

auxquelles il faut ajouter la fonction $y_p \,:\, t \mapsto 3t$.

Note : selon les valeurs de μ, les fonctions ci-dessus ne sont pas définies sur $]0,+\infty[$ tout entier...

⋆ ⋆
⋆