CONTRÔLE CONTINU

Équations différentielles.

Durée : 1h30 *Les calculatrices sont autorisées.*

Tous les exercices sont indépendants.
Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation.

Exercice 1 En chimie, il a été établi que la vitesse de dissolution d'un composé chimique dans l'eau est proportionnelle à la quantité restante.

Lors d'une expérience, on place 20 grammes de ce composé dans l'eau, et on observe que 5 minutes plus tard, il en reste 10 grammes.

On souhaite déterminer, par le calcul, le temps qu'il faut attendre pour qu'il ne reste plus qu'un gramme de composé.

1. Traduire l'expérience ci-dessus sous la forme d'un problème de Cauchy. On notera $\alpha > 0$ le coefficient de proportionnalité évoqué.
2. Déterminer en fonction de α, l'expression de la quantité de composé restante à l'instant t.
3. À l'aide des observation effectuées, déterminer la valeur du coefficient α.
4. Répondre à la question posée.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 On considère l'équation différentielle

$$(H)\ :\ y'' - 4y' + 4y = 0$$

et pour $i \in \{1, 2, 3\}$, on note (E_i) les équations différentielles

$$(E_i)\,;\ y'' - 4y' + 4y = f_i(t)$$

où

$$f_1(t) = e^{-2t}, \qquad f_2(t) = e^{2t}, \qquad f_3(t) = \frac{e^{2t} + e^{-2t}}{2}$$

1. Donner les caractéristiques des équations (H), (E_1), (E_2) et (E_3).
2. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (H).

3. Déterminer une solution particulière y_{p1} de (E_1).
4. (a) Montrer sans calcul que l'équation (E_2) ne peut avoir de solution de la forme

$$t \mapsto \alpha e^{2t} \qquad \text{ou} \qquad t \mapsto \alpha t e^{2t} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

   (b) Déterminer une solution particulière de (E_2) sous la forme

$$y_{p2} : t \longmapsto \alpha t^2 e^{2t}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

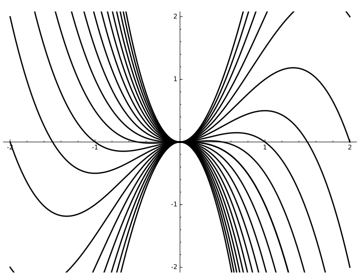
5. Donner sans calcul l'ensemble des solutions de l'équation (E_3).

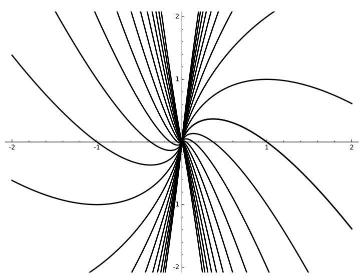
⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

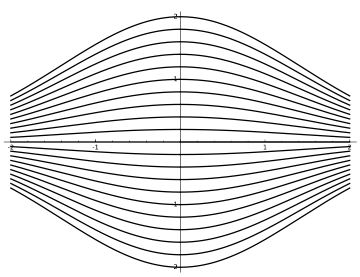
Exercice 3 Soit

$$(E) : ty' - y = -t$$

1. Donner les caractéristiques de l'équation (E).
2. Déterminer les éventuelles valeurs interdites de (E) et en déduire le ou les intervalles de résolution de (E).
3. Déterminer les solutions de l'équation homogène (H) associée à (E) sur chacun des intervalles de résolution.
4. Déterminer, sur chaque intervalle de résolution, une solution particulière de (E) à l'aide de la méthode de variation de la constante et en déduire les ensembles de solutions de (E) sur I_1 et I_2 respectivement.
5. Montrer que toutes les solutions de (E) admettent un prolongement continu en 0. On précisera la valeur de toutes ces fonctions en 0.
6. Montrer que (E) n'admet aucune solution définie sur $\mathbb{R}$. On pourra étudier la *dérivabilité* des solutions obtenues à la question 4.
7. Parmi les graphes ci-dessous, lequel représente les ensembles de solutions obtenus à la question 4 ? Justifier.


I


II


III

⋆ ⋆
⋆

CORRECTION

Exercice 1 :

1. Pour mettre le problème en équation, on note $q(t)$ la quantité restante de composé chimique étudié à l'instant t. La loi régissant la dissolution se traduit alors par l'équation différentielle
$$q'(t) = -\alpha . q(t)$$
On note en particulier que si la constante α est positive, le signe moins assure que la quantité de composé restante diminue au cours du temps.

   Par ailleurs, pour l'expérience proposée, on choisit $q(0) = 20$. L'expérience correspond donc au problème de Cauchy
$$\begin{cases} q' = -\alpha q & (E) \\ q(0) = 20 & (C.I.) \end{cases}$$

2. Formellement, l'équation (E) est une équation différentielle linéaire, d'ordre 1, homogène, à coefficients constants. L'ensemble des solutions de cette équation est
$$\Sigma = \{q \,:\, t \longmapsto \lambda . e^{-\alpha t}, \quad \lambda \in \mathbb{R}\}$$
Parmi ces solutions, celle qui vérifie également la condition initiale donnée est définie par la constante $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que
$$q(0) = 20 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 20$$
La fonction donnant à chaque instant la quantité de composée restante est donc
$$q \,:\, t \longmapsto 20 e^{-\alpha t}$$

3. L'observation intermédiaire (après 5 minutes) se traduit par l'égalité
$$q(5) = 10 \quad \Leftrightarrow \quad 20 e^{-5\alpha} = 10$$
De cette égalité on tire la valeur de α :
$$20 e^{-5\alpha} = 10 \ \Leftrightarrow \ \alpha = -\frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{5} = \frac{\ln(2)}{5}$$

4. À l'aide de la valeur de α calculée ci-dessus, il est alors possible de déterminer le temps t à attendre (en minute) pour qu'il ne reste plus qu'un gramme de composé. Précisément, on cherche t tel que
$$\begin{aligned} q(t) = 1 \ &\Leftrightarrow \ 20 e^{-\frac{\ln(2)}{5} t} = 1 \\ &\Leftrightarrow \ -\frac{\ln(2)}{5} t = \ln\left(\frac{1}{20}\right) \\ &\Leftrightarrow \ t = \frac{5 \ln(20)}{\ln(2)} \approx 21.61 \text{min} \end{aligned}$$

$\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star$

Exercice 2 :

1. Il s'agit de quatre équations d'ordre 2, linéaires, à coefficients constants. Par ailleurs, l'équation (H) est homogène, et les équations (E_i) sont non homogènes.

2. On obtient les solutions de (H) à partir de deux solutions y_1 et y_2 construites à partir des racines du polynôme caractéristique de (H). Ainsi,

$$P(X) = X^2 - 4X + 4 = (X-2)^2$$

Le polynôme $P(X)$ admet donc $r_0 = 2$ comme unique racine (double) et les fonctions

$$y_1 \,:\, t \mapsto e^{2t} \qquad \text{et} \qquad y_2 \,:\, t \mapsto te^{2t}$$

sont deux solutions de (H).

L'ensemble des solutions de (H) est alors l'ensemble

$$\Sigma_h \;=\; \{y_h \,:\, t \longmapsto \lambda\, e^{2t} + \mu\, t\, e^{2t}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

3. On cherche une solution particulière de l'équation

$$(E_1) \,:\, y'' - 4y' + 4y = e^{-2t}$$

sous la forme

$$y_{p1} \,:\, t \longmapsto \alpha\, e^{-2t}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

On a alors

$$y'_{p1}(t) \;=\; -2\alpha\, e^{-2t} \qquad \text{et} \qquad y''_{p2}(t) \;=\; 4\alpha\, e^{-2t}$$

et la fonction y_{p1} est une solution de l'équation (E_1) si

$$\begin{aligned} y''_{p1} - 4y'_{p1} + 4y_{p1} = e^{-2t} &\Leftrightarrow\; 4\alpha e^{-2t} + 8\alpha e^{-2t} + 4\alpha e^{-2t} = e^{-2t} \\ &\Leftrightarrow\; 16\alpha e^{-2t} = e^{-2t} \end{aligned}$$

On en déduite $\alpha = \frac{1}{16}$ et la fonction

$$y_{p1} \,:\longmapsto \frac{1}{16} e^{-2t}$$

est une solution de l'équation (E_1).

4. (a) D'après les résultats obtenus à la question 2, les fonctions de la forme

$$t \mapsto \alpha e^{2t} \qquad \text{et} \qquad t \mapsto \alpha t e^{2t}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

sont des solutions de l'équation (H). Elles ne peuvent donc pas être également des solutions de (E_2).

(b) On cherche une solution particulière de l'équation (E_2) sous la forme

$$y_{p2} \ : \ t \longmapsto \alpha\, t^2\, e^{2t}$$

On a alors

$$y'_{p2}(t) \ = \ \alpha(2t\, e^{2t} + 2t^2\, e^{2t})$$

et

$$y''_{p2}(t) \ = \ \alpha(2e^{2t} + 8te^{2t} + 4t^2 e^{2t})$$

et la fonction y_{p2} est une solution de l'équation (E_2) si

$$\begin{aligned} y''_{p2} - 4y'_{p2} + 4y_{p2} = e^{2t} &\Leftrightarrow \alpha(2e^{2t} + \cancel{8te^{2t}} + \cancel{4t^2 e^{2t}}) - 4\alpha(\cancel{2t}\, e^{2t} + \cancel{2t^2\, e^{2t}}) + \cancel{4t^2\, e^{2t}} = e^{2t} \\ &\Leftrightarrow 2\alpha e^{2t} = e^{2t} \end{aligned}$$

On en déduit $\alpha = \dfrac{1}{2}$ et la fonction

$$y_{p2} \ : \longmapsto \frac{t^2}{2}\, e^{2t}$$

est une solution de l'équation (E_2).

5. Dans l'équation (E_3), le second membre $f_3(t)$ vérifie

$$f_3(t) = \frac{e^{2t} + e^{-2t}}{2} = \frac{1}{2} f_1(t) + \frac{1}{2} f_2(t)$$

D'après le principe de superposition, les résultats obtenus aux question précédentes assurent que la fonction

$$y_3 \ : \ t \longmapsto \frac{1}{2} y_{p1}(t) + \frac{1}{2} y_{p2}(t) = \frac{1}{32} e^{-2t} + \frac{1}{4} t^2\, e^{2t}$$

est alors une solution particulière de (E_3).

Par ailleurs, l'équation homogène associée à (E_3) étant l'équation (H) résolue à la question 2, l'ensemble des solutions de (E_3) est

$$\Sigma_3 \ = \ \left\{ y \ : \ t \longmapsto \lambda\, e^{2t} + \mu\, t\, e^{2t} + \frac{1}{32} e^{-2t} + \frac{1}{4} t^2\, e^{2t}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 :

1. Il s'agit d'une équation linéaire, d'ordre 1, non homogène, à coefficients non constants.
2. L'étude du coefficient de y' dans l'équation (E) indique l'existence d'une unique valeur interdite : $t = 0$. Les intervalles de résolution de (E) sont donc

$$I_1 =]-\infty, 0[\qquad \text{et} \qquad I_2 =]0, +\infty[$$

3. L'équation homogène (H) est
$$(H)\ :\ ty' - y = 0$$
On peut résoudre cette équation sur les deux intervalles de résolution en tenant compte du signe de t au cours de la résolution :
$$\begin{aligned}
(H)\ :\ ty' - y = 0 \ &\Leftrightarrow\ \frac{y'}{y} = \frac{1}{t}\\
&\Leftrightarrow\ \ln|y_h(t)| = \ln|t| + k = \begin{cases} \ln(-t) + k & \text{sur } I_1 \\ \ln(t) + k & \text{sur } I_2 \end{cases}\\
&\Leftrightarrow\ y_h(t) = \begin{cases} \lambda_1.t, \quad \lambda_1 \in \mathbb{R} & \text{sur } I_1 \\ \lambda_2.t, \quad \lambda_2 \in \mathbb{R} & \text{sur } I_2 \end{cases}
\end{aligned}$$
D'où
$$\Sigma_{h,1} \ =\ \{y_{h,1}\ :\ t \mapsto \lambda_1.t,\ \ \lambda_1 \in \mathbb{R}\}, \qquad \Sigma_{h,2} \ =\ \{y_{h,2}\ :\ t \mapsto \lambda_2.t,\ \ \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$$

4. On déterminer, sur chaque intervalle, une solution particulière de (E) en appliquant la méthode de variation de la constante. Ainsi, sur I_1 et sur I_2, on cherche une solution y_p sous la forme
$$y_p(t) = \lambda(t).t$$
On a alors
$$y_p'(t) = \lambda'(t).t + \lambda(t)$$
et y_p est une solution de (E) si et seulement si
$$\begin{aligned}
ty_p'(t) - y_p(t) = -t \ &\Leftrightarrow\ \lambda'(t).t^2 + \cancel{t.\lambda(t)} - \cancel{\lambda(t).t} = -t\\
&\Leftrightarrow\ \lambda'(t) = -\frac{1}{t}
\end{aligned}$$
On peut ainsi poser
$$\lambda(t) = -\ln|t| = \begin{cases} -\ln(-t) & \text{sur } I_1 \\ -\ln(t) & \text{sur } I_2 \end{cases}$$
et
$$\begin{cases} y_{p,1}\ :\ t \mapsto -t.\ln(-t) & \text{est une solution de } (E) \text{ sur } I_1 \\ y_{p,2}\ :\ t \mapsto -t.\ln(t) & \text{est une solution de } (E) \text{ sur } I_2 \end{cases}$$
On en déduit les solutions de (E) sur chacun des intervalles de résolution :
$$\Sigma_1 = \{y_1\ :\ t \mapsto \lambda_1.t - t.\ln(-t),\ \ \lambda_1 \in \mathbb{R}\}, \qquad \Sigma_2 = \{y_2\ :\ t \mapsto \lambda_2.t - t.\ln(t),\ \ \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$$

5. Par croissances comparées, on montre que pour tout $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, on a
$$\lim_{t \overset{\leq}{\to} 0} y_1(t) = \lim_{t \overset{\geq}{\to} 0} y_2(t) = 0$$
Toutes les solutions de (E) trouvées ci-dessus admettent donc un prolongement continu en 0 défini par $y_1(0) = y_2(0) = 0$.

6. Les solutions d'une équation différentielles sont nécessairement dérivables. Or, si l'on étudie la dérivabilité à gauche (resp. à droite) en 0 des fonctions y_1 (resp. y_2), on note que

$$\lim_{t \overset{<}{\to} 0} \frac{y_1(t) - y_1(0)}{t - 0} = \lim_{t \overset{<}{\to} 0} \lambda_1 - \ln(-t) = +\infty$$
$$\lim_{t \overset{>}{\to} 0} \frac{y_2(t) - y_2(0)}{t - 0} = \lim_{t \overset{>}{\to} 0} \lambda_2 - \ln(t) = +\infty$$

   Ainsi, aucune de ces fonctions prolongée n'est dérivable en 0 et il n'existe aucune fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation (E).

7. Par élimination, il s'agit du graphe II. En effet,
   - sur le graphe III, les fonctions représentées ne vérifient pas toutes $y(0) = 0$,
   - sur le graphe I, les fonctions représentées vérifient la condition $y(0) = 0$ mais également $y'(0) = 0$, ce qui est en contradiction avec les calculs effectués plus haut.

⋆ ⋆
⋆