CONTRÔLE CONTINU

Équations différentielles.

Durée : 2h. *Les calculatrices sont autorisées.*

Tous les exercices sont indépendants.
Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation.

Exercice 1 On désigne par $q(t)$ la température (exprimée en degrés Celsius) d'un corps a l'instant t (exprimé en heures). À l'instant $t = 0$, ce corps dont la température est de $100°C$ est placé dans une salle à $20°C$. D'après la loi de refroidissement de Newton, la vitesse de refroidissement $q'(t)$ est proportionnelle a la différence entre la température du corps et celle de la salle. On suppose que le coefficient de refroidissement est $k = -2,08$.

1. Justifier que $q'(t) = -2,08q(t) + 41,6$.
2. En déduire l'expression de $q(t)$ en fonction de t.
3. Déterminer le sens de variation de la fonction q sur $[0; +\infty[$.
4. Calculer la limite de q en $+\infty$. Interpréter ce résultat.
5. Déterminer la température du corps, arrondie au degré, au bout de 20 minutes puis au bout de 30 minutes.
6. Déerminer la valeur exacte du temps au bout duquel le corps tombera a $30°C$. En donner une valeur approchée.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 Soit

$$(E)\ :\ y' = -y^3 + (2-a)y^2 + (2a-1)y - a$$

à laquelle on ajoute la condition initiale $y(0) = y_0$.

1. Quel est le type de l'équation de (E).
2. Montrer que $y = 1$ est une solution constante de (E).
3. En déduire les autres solutions constantes et donner leurs natures.
4. Tracer l'allure des solutions de (E) en fonction de y_0.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 Soit

$$(S)\ :\ \begin{cases} x' = -2x + y & (E_1) \\ y' = -5x & (E_2) \\ z' = 3y - 2z & (E_3) \end{cases}$$

1. Donner le système (S) sous forme matricielle $X' = AX$ où $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$.
2. Montrer, à l'aide des équations (E_1) et (E_2) que si $X(t)$ est une solution de (S), la fonction x vérifie l'équation
$$x'' + 2x' + 5x = 0.$$
3. Déterminer $x(t)$ puis $y(t)$ en fonction de deux constantes A et B.
4. Déterminer $z(t)$ à l'aide des résultats précédents et de l'équation (E_3) en fonction des constantes A et B et d'une troisième constante C.
5. Déterminer les constantes A, B et C donnant LA solution de (S) vérifiant les conditions initiales
$$x(0) = x_0,\ y(0) = y_0,\ z(0) = z_0.$$
On donnera en particulier cette solution sous la forme
$$X(t) = M(t) \times X_0$$
où $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ et $M(t)$ est une matrice 3×3 dont les coefficients dépendent de t.
6. Si $(x(t), y(t), z(t))$ sont les coordonnées d'une particule se déplaçant dans l'espace muni d'un repère orthonormé, que dire de la trajectoire de cette particule au bout d'un temps long ?

⋆ ⋆
⋆