CONTRÔLE CONTINU

Équations différentielles.

Durée : 1h30 *Les calculatrices sont autorisées.*

Tous les exercices sont indépendants.
Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation.

Exercice 1 Pour tout $\alpha \geqslant 0$, on considère le problème suivant :

$$(S_\alpha)\ :\ \begin{cases} y'' + y = \sin(\alpha t) & (E) \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 & (C.I.) \end{cases}$$

1. Déterminer les solutions de l'équation homogène associée à (E).

2. On considère ici que $\underline{\alpha \neq 1}$.
   (a) Montrer que la fonction
   $$y_p\ :\ t \mapsto \frac{1}{1-\alpha^2}\sin(\alpha t).$$
   est une solution de (E).
   (b) En déduire l'unique solution de (S_α). On exprimera cette solution à l'aide des fonctions trigonométriques.

3. On suppose ici que $\underline{\alpha = 1}$.
   (a) Déterminer une solution particulière de (E) sous la forme
   $$y_p(t) = \lambda t \cos(t)$$
   (b) En déduire l'unique solution de (S_1) là encore exprimée à l'aide des fonctions trigonométriques.

4. Comparer le comportement à l'infini des solutions obtenues dans les cas $\alpha \neq 1$ et $\alpha = 1$ et commenter.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 Soit

$$(E)\ :\ xy' + 2y = \frac{1}{1+x^2}.$$

1. Déterminer les intervalles de résolution I_1 et I_2. (On notera I_1 l'intervalle contenant 1).

2. *Résolution sur* I_1
   (a) Déterminer les solutions de l'équation homogène associée à (E) sur I_1 en fonction d'une constante λ.
   (b) Déterminer une solution particulière de (E) sur I_1 par la méthode de variation de la constante.
   (c) En déduire les solutions de (E) sur I_1 en fonction d'une constante λ.
   (d) Déterminer les valeurs de λ correspondant aux conditions initiales suivantes :
   $$a)\ y(1) = 1 + \frac{1}{2}\ln(2), \quad b)\ y(1) = -1 + \frac{1}{2}\ln 2, \quad c)\ y(1) = \frac{1}{2}\ln 2$$

(e) Tracer les trois solutions associées dans un même repère.

3. *Résolution sur I_2*

   (a) Déterminer les solutions de (E) sur I_2 en fonction d'une constante μ (on pourra en particulier montrer que la solution particulière obtenue à la question 2b est également une solution de (E) sur I_2).

   (b) Déterminer la valeur de μ correspondant à la condition initiale $y(-1) = \frac{1}{2}\ln 2$.

   (c) Tracer la solution associée dans le repère utilisé à la question 2e.

   (d) Commenter.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 En 1838, le mathématicien belge Pierre-François Verhulst a proposé, pour modéliser l'accroissement d'une population dont la taille est limitée par une quantité $N_{\max}$. En notant $N(t)$ le nombre d'individus à l'instant t, P.F. Verhulst a proposé l'équation

$$(E)\,:\,N' = aN\left(1 - \frac{N}{N_{\max}}\right)$$

où a est une constante positive.

1. *Une étude qualitative.*

   (a) Déterminer une fonction F telle que (E) soit de la forme $N' = F(N)$.

   (b) Déterminer les deux points fixes de F. À quoi correspondent-ils pour l'équation (E) ?

   (c) Déterminer la nature de chacun des points fixes de F.

   (d) Tracer l'allure des solutions en fonction du nombre N_0 d'individus à $t = 0$. On distinguera en particulier les cas
      - $N_0 = 0$,
      - $0 < N_0 < N_{\max}$,
      - $N_0 = N_{\max}$,
      - $N_0 > N_{\max}$.

2. *Résolution exacte.*
   Pour résoudre (E) de façon exacte, on propose le changement de variable $y = \frac{1}{N}$.

   (a) Montrer que si N est une solution de (E), la fonction $y = \dfrac{1}{N}$ vérifie l'équation

   $$(E')\,:\,y' + ay = \frac{a}{N_{\max}}$$

   (b) Déterminer les solutions de (E') en fonction de $N_{\max}$ et d'une contante λ.

   (c) En déduire les solutions de (E) en fonction de $N_{\max}$ et λ.

   (d) Montrer que l'unique solution de (E) vérifiant $N(0) = N_0$ et donnée par

   $$\lambda = \frac{1}{N_0} - \frac{1}{N_{\max}}$$

   (e) En déduire l'expression de $N(t)$ en fonction de N_0 et $N_{\max}$

⋆ ⋆
⋆

CORRECTION

Exercice 1 :

1. L'équation homogène associée à (E) est

$$(H)\ :\ y'' + y = 0$$

Son polynôme caractéristique est

$$P(X) = X^2 + 1 = (X - i)(X + i)$$

Les solutions de (H) sont donc les fonctions de la forme

$$y_h\ :\ t \longmapsto A\cos(t) + B\sin(t), \quad A, B \in \mathbb{R}$$

2. (a) Si $y_p\ :\ t \mapsto \dfrac{1}{1-\alpha^2}\sin(\alpha t)$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} y_p'(t) &= \frac{\alpha}{1-\alpha^2}\cos(\alpha t) \\ y_p''(t) &= -\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}\sin(\alpha t) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, \quad y_p''(t) + y_p(t) &= -\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}\sin(\alpha t) + \frac{1}{1-\alpha^2}\sin(\alpha t) \\ &= \left(-\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2} + \frac{1}{1-\alpha^2}\right)\sin(\alpha t) \\ &= \sin(\alpha t) \end{aligned}$$

Donc y_p est bien une solution de (E).

(b) Les solutions de (E) sont donc les fonctions de la forme

$$y\ :\ t \longmapsto A\cos(t) + B\sin(t) + \frac{1}{1-\alpha^2}\sin(\alpha t), \qquad A, B \in \mathbb{R}$$

Ainsi, pour toute solution y de (E), on a

$$\begin{aligned} y(0) &= A \\ y'(t) &= -A\sin(t) + B\cos(t) + \frac{\alpha}{1-\alpha^2}\cos(\alpha t) \\ y'(0) &= B + \frac{\alpha}{1-\alpha^2} \end{aligned}$$

Donc parmi toutes ces solutions, celle qui vérifie également les condition $(C.I.)$ sont associées au couple $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{lcl} A & = & 0 \\ B + \frac{\alpha}{1-\alpha^2} & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{lcl} A & = & 0 \\ B & = & \frac{1}{\alpha^2-1} \end{array} \right.$$

La solution cherchée est donc

$$y\ :\ t \longmapsto \frac{1}{\alpha^2-1}\cos(t) + \frac{1}{1-\alpha^2}\sin(\alpha t) = \frac{1}{\alpha^2-1}(\cos(t) - \sin(\alpha t))$$

3. (a) On cherche y_p sous la forme $y_p\ :\ t \mapsto \lambda t\cos(t)$. On a alors

$$\begin{aligned} y_p'(t) &= \lambda(\cos(t) - t\sin(t)) \\ y_p''(t) &= \lambda(-\sin t - \sin(t) - t\cos(t)) = -\lambda(2\sin(t) + t\cos(t)) \end{aligned}$$

Ainsi, y_p est solution de (E) si et seulement si

$$\begin{aligned}
& y_p''(t) + y_p(t) = \sin(t) \\
\iff & -\lambda(2\sin(t) + \cancel{t\cos(t)}) + \cancel{\lambda t\cos(t)} = \sin(t) \\
\iff & -2\lambda\sin(t) = \sin(t) \\
\iff & -2\lambda = 1 \\
\iff & \lambda = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Une solution particulière de (E) est donc

$$y_p \,:\, t \longmapsto -\frac{t}{2}\cos(t)$$

(b) Les solutions de (E) sont donc les fonctions de la forme

$$y \,:\, t \longmapsto A\cos(t) + B\sin(t) - \frac{t}{2}\cos(t)$$

Ainsi, pour toute solution y de (E), on a

$$\begin{aligned}
y(0) &= A \\
y'(t) &= -A\sin(t) + B\cos(t) - \frac{1}{2}\cos(t) + \frac{t}{2}\sin(t) \\
y'(0) &= B - \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

L'unique solution de (E) vérifiant $(C.I.)$ est donc donnée par les constantes A et B vérifiant

$$\left\{\begin{array}{lcl} A & = & 0 \\ B - \frac{1}{2} & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} A & = & 0 \\ B & = & \frac{1}{2} \end{array}\right.$$

Ainsi, l'unique solution cherchée est

$$y \,:\, t \longmapsto \frac{1}{2}(\sin(t) - t\cos(t))$$

4. Si $\alpha \neq 1$, les solutions de (E) restent bornées. Si $\alpha = 1$, l'amplitude des solutions de (E) tend vers l'infini. Il s'agit dans ce second cas d'un phénomène de résonance : d'après l'étude de l'équation (H), la pulsation propre du système est $\omega_0 = 1$. Si l'on alimente le système avec une fonction périodique ayant la même pulsation (cas $\alpha = 1$), le système entre en résonance.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 :

1. L'unique valeur interdite de cette équation est $x = 0$. Les intervalles d'étude sont donc

$$I_1 =]0, +\infty[\qquad \text{et} \qquad I_2 =]-\infty, 0[$$

2. (a) L'équation homogène associée à (E) est

$$(H) \,:\, xy' + 2y = 0 \iff y' = -\frac{2}{x}y$$

Or une primitive de $x \mapsto -\frac{2}{x}$ est $x \mapsto -2\ln|x| = -2\ln(x)$ car $x > 0$ sur I_1. Donc les solutions de (H) sont les fonctions de la forme

$$y_h \,:\, x \longmapsto \lambda e^{-2\ln(x)} = \frac{\lambda}{x^2}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

(b) La méthode de variation de la constante consiste à chercher une solution particulière y_p de (E) sous la forme $y_p \,:\, x \mapsto \frac{\lambda(x)}{x^2}$. Or dans ce cas, on a

$$y_p'(x) = \frac{\lambda'(x).x^2 - \lambda(x).(2x)}{x^4} = \frac{\lambda'(x)}{x^2} - 2\frac{\lambda(x)}{x^3}$$

La fonction y_p est donc une solution de (E) si et seulement si

$$\begin{aligned} & xy_p'(x) + 2y_p(x) = \frac{1}{1+x^2} \\ \iff & \frac{\lambda'(x)}{x} - 2\cancel{\frac{\lambda(x)}{x^2}} + 2\cancel{\frac{\lambda(x)}{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} \\ \iff & \lambda'(x) = \frac{x}{1+x^2} \end{aligned}$$

Or une primitive de $\left[x \mapsto \frac{x}{1+x^2}\right]$ est $\left[x \mapsto \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]$. La fonction

$$y_p \,:\, x \longmapsto \frac{\ln(1+x^2)}{2x^2}$$

est donc une solution de (E).

(c) D'après les résultats obtenus aux questions précédentes, les solutions de (E) sont

$$y \,:\, x \longmapsto \frac{\lambda}{x^2} + \frac{\ln(1+x^2)}{2x^2}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

(d) Si y est une solution de (E), on a

$$y(1) = \lambda + \frac{1}{2}\ln(2)$$

Parmi toutes les solutions de (E), isolons trois solutions vérifiant les conditions initiales données :

- $y_1(1) = 1 + \frac{1}{2}\ln(2) \quad \Rightarrow \quad \lambda + \frac{1}{2}\ln(2) = 1 + \frac{1}{2}\ln(2) \quad \Rightarrow \quad \lambda = 1$

  $\Rightarrow \quad y_1 \,:\, x \longmapsto \dfrac{2 + \ln(1+x^2)}{2x^2}$

- $y_2(1) = -1 + \frac{1}{2}\ln(2) \quad \Rightarrow \quad \lambda + \frac{1}{2}\ln(2) = -1 + \frac{1}{2}\ln(2) \quad \Rightarrow \quad \lambda = -1$

  $\Rightarrow \quad y_2 \,:\, x \longmapsto \dfrac{-2 + \ln(1+x^2)}{2x^2}$

- $y_3(1) = \frac{1}{2}\ln(2) \quad \Rightarrow \quad \lambda + \frac{1}{2}\ln(2) = \frac{1}{2}\ln(2) \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0$

  $\Rightarrow \quad y_3 \,:\, x \longmapsto \dfrac{\ln(1+x^2)}{2x^2}$

(e) Pour tracer les trois courbes, on peut étudier rapidement ces trois fonctions :

- y_1 est positive pour tout $x > 0$.
  D'autre part, elle tend vers $+\infty$ en 0^+ (de la forme $\frac{2}{0}$). En $+\infty$, c'est une forme indéterminée de la forme $\frac{\infty}{\infty}$, mais d'après les croissances comparées, on a

  $$\frac{2+\ln(1+x^2)}{2x^2} \sim \frac{\ln(1+x^2)}{2x^2} \sim \frac{2\ln(x)}{2x^2} \sim \frac{\ln(x)}{x^2} \to 0$$

  D'où l'esquisse présentée sur le dessin ci-dessous.

- y_2 est s'annule pour $x^* = \sqrt{e^2-1}$. D'autre part, $y_2(x) < 0$ pour $0 < x < x^*$ et $y_2(x) > 0$ pour $x > x^*$.
  D'autre part, elle tend vers $-\infty$ en 0^+ (de la forme $-\frac{2}{0}$) et vers 0 en $+\infty$.
  D'où l'esquisse présentée sur le dessin ci-dessous.

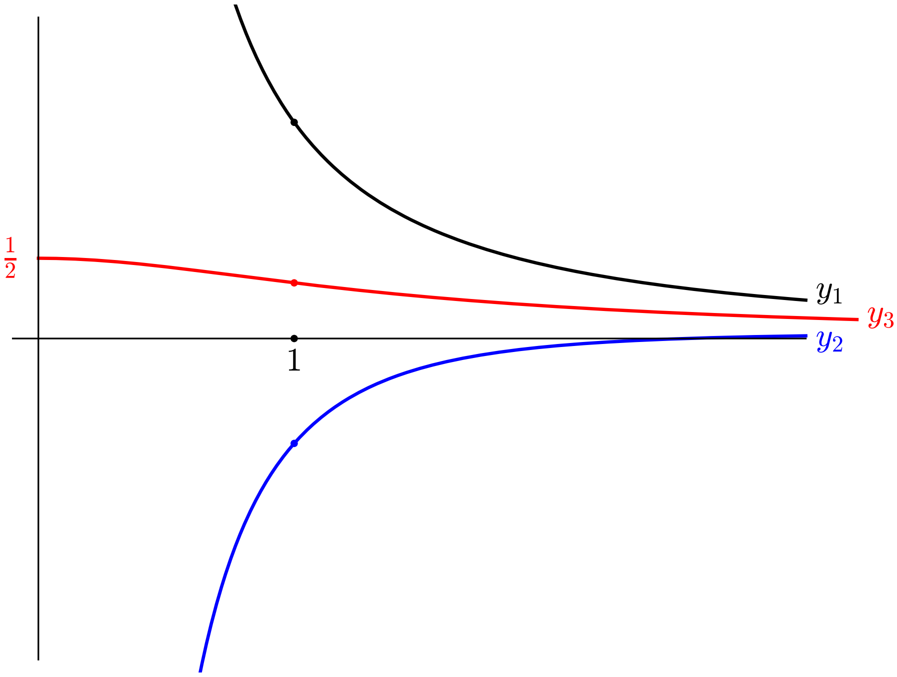
- y_3 est positive sur $\mathbb{R}_*^+$.
  Comme les autres, elle tend vers 0 en $+\infty$. Cependant, en 0^+, on peut montrer, à l'aide du D.L. de la fonction $u \mapsto \ln(1+u)$, on peut montrer que y_3 admet une limite finie. Précisément :

$$\ln(1+u) = u + o(u)$$

  donc

$$\frac{\ln(1+x^2)}{2x^2} = \frac{x^2 + o(x^2)}{2x^2} = \frac{1}{2} + o(1) \to \frac{1}{2}$$

  D'où l'esquisse présentée sur le dessin ci-dessous.



3. (a) La seule fois que l'on a utilisé le signe de la variable x lors de la résolution de (E) sur $I_1 =]0, +\infty[$ est au moment de la résolution de l'équation (H). Sur I_2, il suffit alors de remplacer x par $-x$ (car sur I_2, on a $|x| = -x$). Ainsi, les solutions de (H) sur I_2 sont les fonctions de la forme

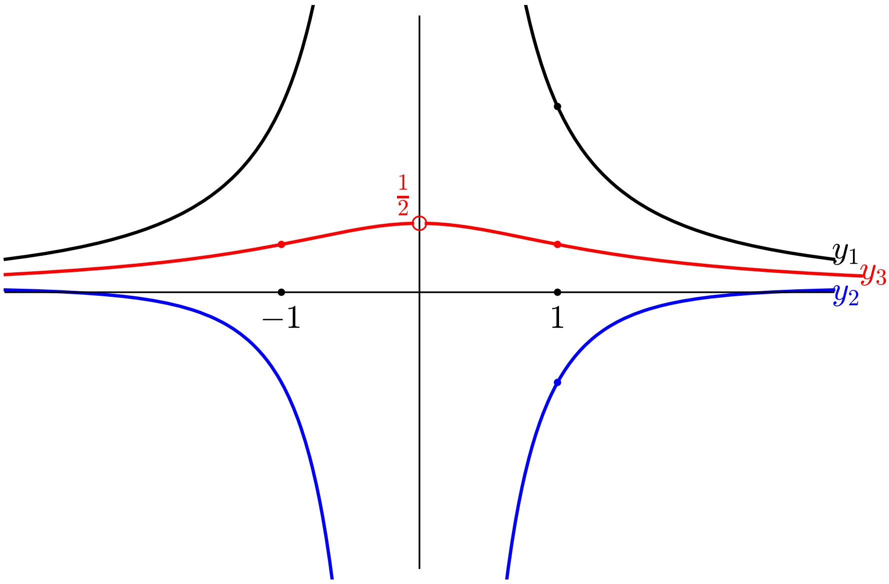
$$y_h : x \longmapsto \frac{\mu}{(-x)^2} = \frac{\mu}{x^2}, \qquad \mu \in \mathbb{R}$$

   Par ailleurs, la solution $y_p : x \mapsto \dfrac{\ln(1+x^2)}{2x^2}$ étant paire, elle possède exactement les mêmes propriétés sur I_2 que sur I_1. Elle vérifie donc en particulier l'équation (E) sur I_2.
   L'ensemble des solutions de (E) sur I_2 est donc l'ensemble des fonctions de la forme

$$y : x \longmapsto \frac{\mu}{x^2} + \frac{\ln(1+x^2)}{2x^2}, \qquad \mu \in \mathbb{R}$$

   (b) Par symétrie, l'unique solution de (E) sur I_2 vérifiant la condition initiale $y(-1) = \frac{1}{2}\ln(2)$ est la fonction y_p ci dessus. Elle vérifie en particulier $\lim\limits_{x \to 0^-} y_p(x) = \dfrac{1}{2}$.

   (c) On obtient alors (toujours par symétrie) le graphe ci-dessous :



(d) La fonction y_p semble être la seule solution de (E) qui "traverse" la valeur interdite $x = 0$. Pour confirmer cela, il faudrait étudier la dérivabilité en 0 de la fonction

$$Y : x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x^2)}{2x^2} & \text{si} \quad x \neq 0 \\[2ex] \dfrac{1}{2} & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

Or puisque $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$, on a

$$\begin{aligned}\frac{Y(x) - Y(0)}{x} &= \frac{\frac{\ln(1+x^2)}{2x^2} - \frac{1}{2}}{x} \\ &= \frac{\ln(1+x^2) - x^2}{2x^3} \\ &= \frac{\cancel{x^2} - \frac{x^4}{2} + o(x^4) - \cancel{x^2}}{2x^3} \\ &= -\frac{x}{4} + o(x) \ \to 0 \text{ quand } x \to 0\end{aligned}$$

Cette limite ne dépendant pas du signe de x, la fonction Y est donc dérivable en 0 (et $Y'(0) = 0$). C'est donc bien une solution de (E) définie sur $\mathbb{R}$.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 :

1. (a) La fonction F définissant l'équation différentielle autonome $(E) : N' = aN\left(1 - \dfrac{N}{N_{\max}}\right)$ est

$$F : x \longmapsto ax\left(1 - \frac{x}{N_{\max}}\right)$$

(b) Les points fixes de F sont par définition les solutions de l'équation $F(x) = 0$. Or

$$F(x) = 0 \ \Leftrightarrow \ ax\left(1 - \frac{x}{N_{\max}}\right) = 0 \ \Leftrightarrow \ \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 0 \\ \text{ou} & & \\ 1 - \frac{x}{N_{\max}} & = & 0 \end{array}\right. \ \Leftrightarrow \ \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 0 \\ \text{ou} & & \\ x & = & N_{\max} \end{array}\right.$$

Ces deux solutions produisent les solutions constantes de (E) :

$$N_1 : t \mapsto 0 \quad \text{et} \quad N_2 : t \mapsto N_{\max}$$

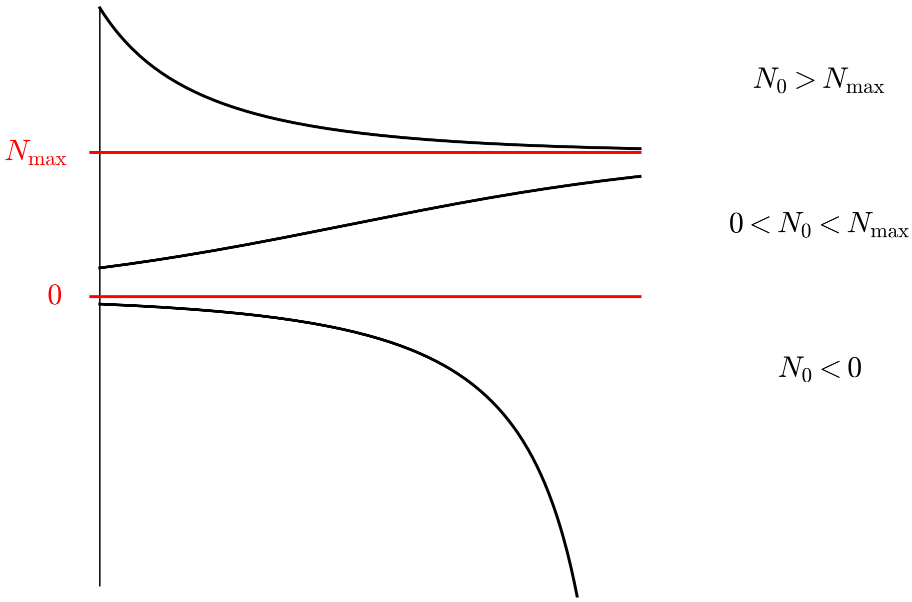
(c) La nature de ces points fixes (stable ou instable) peut être donnée par le signe de $F'(0)$ et $F'(N_{\max})$. Or

$$F'(x) = a\left(1 - \frac{x}{N_{\max}}\right) + ax\left(-\frac{1}{N_{\max}}\right) = a - \frac{2ax}{N_{\max}}$$

Ainsi

- $F'(0) = a > 0$ donc N_1 est un point fixe instable.
- $F'(N_{\max}) = -a < 0$ donc N_2 est un point fixe stable.

(d) On obtient alors les courbes ci-dessous :



2. (a) En posant $y = \frac{1}{N}$, on a $N = \frac{1}{y}$ et $N' = -\frac{y'}{y^2}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} N' = aN\left(1 - \frac{N}{N_{\max}}\right) &\iff -\frac{y'}{y^2} = a\frac{1}{y}\left(1 - \frac{1}{yN_{\max}}\right) = \frac{a}{y} - \frac{a}{N_{\max}y^2} \\ &\iff -y' = ay - \frac{a}{N_{\max}} \\ &\iff y' + ay = \frac{a}{N_{\max}} \end{aligned}$$

(b) On reconnaît en (E') une équation différentielle linéaire, d'ordre 1, à coefficients constants, avec un second membre constant. L'équation homogène associée à (E') est

$$(H') \,:\, y' + ay = 0$$

dont les solutions sont

$$y_h \,:\, t \longmapsto \lambda e^{-at}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

Par ailleurs, l'équation (E') admet comme solution constante la fonction constante égale à $\frac{1}{N_{\max}}$. Ainsi, les solutions de (E') sont

$$y \,:\longmapsto \lambda e^{-at} + \frac{1}{N_{\max}}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

(c) Les solutions de (E) sont donc les fonctions de la forme

$$N \,:\, t \longmapsto \frac{1}{y(t)} = \frac{1}{\lambda.e^{-at} + \frac{1}{N_{\max}}}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

(d) Parmi toutes ces solutions, celle vérifiant en outre $N(0) = N_0$ est donnée par

$$N(0) = N_0 \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{\lambda + \frac{1}{N_{\max}}} = N_0 \;\Leftrightarrow\; \lambda + \frac{1}{N_{\max}} = \frac{1}{N_0} \;\Leftrightarrow\; \lambda = \frac{1}{N_0} - \frac{1}{N_{\max}}$$

soit la fonction

$$N \,:\, t \longmapsto \frac{1}{\left(\frac{1}{N_0} - \frac{1}{N_{\max}}\right) e^{-at} + \frac{1}{N_{\max}}} = \frac{N_0 N_{\max}}{(N_{\max} - N_0)e^{-at} + N_0}$$

Note : en étudiant ces fonctions, on doit retrouver les allures obtenues lors de l'étude qualitative.

⋆ ⋆
⋆