CONTRÔLE CONTINU

Équations différentielles.

Durée : 1h30 *Les calculatrices sont autorisées.*

Tous les exercices sont indépendants.
Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation.

Exercice 1 Soit

$$(E)\ :\ (1-x^2)y' - 2xy \ = \ 3x^2.$$

1. Déterminer les trois intervalles I_1, I_2 et I_3 de résolution de (E). On notera I_2 l'intervalle contenant 0.
2. Montrer que pour $k = 1, 2$ et 3, les solutions de l'équation homogène (H) associée à (E) sur I_k sont de la forme
$$y_h\ :\ x \mapsto \frac{\lambda_k}{1-x^2}, \quad \lambda_k \in \mathbb{R}.$$
3. Déterminer, pour chacun de ces intervalles, une solution particulière de (E) en appliquant la méthode de variation de la constante.
4. *Prolongement en* 1
   (a) Déterminer l'unique solution y_1 de (E) définie sur I_2 et vérifiant $y(0) = -1$.
   (b) Montrer que y_1 se prolonge en une solution définie sur $]-1, +\infty[$.
5. *Prolongement en* -1
   (a) Déterminer l'unique solution y_2 de (E) définie sur I_2 et vérifiant $y(0) = 1$.
   (b) Montrer que y_2 se prolonge en une solution définie sur $]-\infty, 1[$.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère le système

$$(S_a)\ :\ \begin{cases} x' = ay & (E_1) \\ y' = -ax & (E_2) \end{cases}$$

1. Montrer que si (x, y) est une solution de (S_a), alors la fonction x vérifie
$$x'' + a^2x = 0.$$
2. En déduire $x(t)$ puis $y(t)$.

3. Dans le plan muni d'un repère $\mathcal{R}$ orthonormé on considère une particule dont les coordonnées à chaque instant sont données par $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$.

   (a) Déterminer l'unique solution de (S_a) qui vérifie les conditions initiales
   $$x(0) = 1, \qquad y(0) = 0.$$

   (b) Décrire la trajectoire d'une telle particule si son point de départ est le point $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   (c) Déterminer l'unique solution de (S_a) qui vérifie les conditions initiales
   $$x(0) = 0, \qquad y(0) = 2.$$

   (d) Décrire la trajectoire d'une telle particule si son point de départ est le point $P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

   (e) De façon générale, déterminer l'unique solution de (S_a) qui vérifie les conditions initiales
   $$x(0) = x_0, \qquad y(0) = y_0.$$

   (f) Décrire la trajectoire d'une particule en fonction de sont point de départ $P_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 Soit
$$(E) \ : \ y' = 1 - e^y.$$

1. *Étude qualitative.*

   (a) Déterminer la fonction F telle que $y' = F(y)$.

   (b) En déduire l'unique point fixe de (E) et déterminer sa nature.

   (c) Tracer l'allure de quelques solutions.

2. *Résolution exacte.*

   (a) Montrer que si y est une solution non nulle de (E) alors
   $$\frac{y'e^{-y}}{e^{-y} - 1} \ = \ 1.$$

   (b) En déduire l'ensemble des solutions de (E).

   (c) Le résultat trouvé à la question précédente est-il cohérent avec l'étude qualitative de la question 1 ? (Justifier).

⋆ ⋆
⋆

CORRECTION

Exercice 1 :

1. Les valeurs interdites sont ici les valeurs qui annulent le coefficient $1-x^2$ de y', soient ± 1. Les trois intervalles de résolution sont donc

$$I_1 =]-\infty, -1[, \quad I_2 =]-1, 1[, \quad I_3 =]1, +\infty[$$

2. L'équation homogène (H) est

$$(H) \,:\, (1-x^2)y' - 2xy = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y'}{y} = \frac{2x}{1-x^2}$$

Les solutions de (H) sur chacun s'obtiennent en intégrant de chaque coté la dernière égalité ci-dessus. On obtient

$$y(x) = \frac{\lambda_k}{|1-x^2|}, \qquad \lambda_k \in \mathbb{R}.$$

Or $(1-x^2)$ étant de signe constant sur chacun des intervalles I_k, on peut supprimer la valeur absolue quitte à changer λ_k en $-\lambda_k$.

3. Plaçons nous sur I_1. Par la méthode de variation de la constante, on cherche une solution y_p de (E) sous la forme

$$y_p \,:\, x \mapsto \frac{\lambda_1(x)}{1-x^2}.$$

En calculant la dérivée y_p' de y_p et en injectant le tout dans l'équation (E), on trouve que pour que y_p soit solution de (E), il faut et il suffit que

$$\lambda_1'(x) = 3x^2.$$

On peut donc choisir $\lambda_1(x) = x^3$ et

$$y_p(x) = \frac{x^3}{1-x^2}$$

On vérifie rapidement que cette fonction est encore solution de (E) sur I_2 et I_3. Ainsi, les solutions de (E) sur I_k sont donc les fonctions de la forme

$$y \,:\, x \mapsto \frac{\lambda_k + x^3}{1-x^2}, \qquad \lambda_k \in \mathbb{R}.$$

4. La condition initiale étant donnée à $x = 0$, on se place sur l'intervalle I_2.
   (a) La solution de (E) vérifiant $y(0) = -1$ est telle que

   $$\frac{\lambda_2 + 0^3}{1-0^2} = -1 \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda_2 = -1.$$

   (b) La solution déterminée à la question précédente est

   $$y \,:\, x \longmapsto -\frac{1-x^3}{1-x^2} = -\frac{1+x+x^2}{1+x}$$

   Cette fonction admet pour limite finie $\ell = -\frac{3}{2}$ quand x tend vers 1^-. On constate de plus que cette fonction est définie, continue et dérivable sur $]-1, +\infty[$. Étant de la forme $x \mapsto \frac{\lambda_3 + x^3}{1-x^2}$ pour $\lambda_3 = -1$, elle est également solution de (E) sur I_3. C'est le prolongement cherché.

5. Les raisonnements sont ici identiques à ceux de la question précédente. On obtient $\lambda_2 = 1$ et

$$y \,:\, x \mapsto \frac{1+x^3}{1-x^2} = \frac{1-x+x^2}{1-x} \longrightarrow_{x\to -1^+} \frac{3}{2}.$$

Cette fonction est encore définie continue et dérivable sur $]-\infty, 1[$ et correspond au prolongement cherché (avec $\lambda_1 = 1$).

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 :

1. Soit (x, y) une solution de (S_a). En dérivant (E_1) on obtient $x'' = ay' \Leftrightarrow y' = \frac{x''}{a}$. En injectant ce résultat dans (E_2), on obtient

$$\frac{x''}{a} = ax \iff x'' + a^2x = 0.$$

2. L'équation précédente est une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants dont le polynôme caractéristique est

$$P(X) = X^2 + a^2 = (X - ai)(X + ai).$$

Les solutions de cette équation (sous forme trigo) sont donc

$$x(t) = A\cos(at) + B\sin(at), \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

De plus, d'après (E_1), on a $y = \frac{x'}{a}$, d'où

$$y(t) = -A\sin(at) + B\cos(at).$$

3. (a) L'unique solution de (S_a) vérifiant $x(0) = 1,\ y(0) = 0$ est donnée par le système $\left\{\begin{array}{ll} A & = \ 1 \\ B{=}0 & \end{array}\right.$. D'où

$$X(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

   (b) La trajectoire associée à la paramétrisation ci-dessus est le cercle unité. La particule tourne en rond autour de l'origine avec un rayon de 1.

   (c) L'unique solution de (S_a) vérifiant $x(0) = 0,\ y(0) = 2$ est donnée par le système $\left\{\begin{array}{ll} A & = \ 0 \\ B{=}2 & \end{array}\right.$. D'où

$$X(t) = \begin{pmatrix} 2\sin(t) \\ 2\cos(t) \end{pmatrix}$$

   (d) La trajectoire associée à la paramétrisation ci-dessus est encore un cercle centré en l'origine mais de rayon 2.

   (e) Pour le cas général, on trouve un cercle de rayon $\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$.

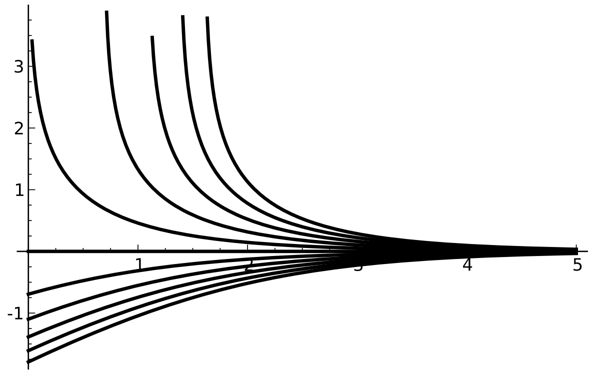
⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 :

1. (a) La fonction F cherchée est $F\,:\,x \mapsto 1 - e^x$.

   (b) Les points fixes de (E) sont les solutions de $F(x) = 0$, soit ici $x = 0$. La nature de ce point fixe est donnée par le signe de $F'(0) = -e^0 = -1 < 0$. Il s'agit donc d'un point fixe stable.

   (c)



2. (a)

$$\begin{aligned} & y' = 1 - e^y \\ \Leftrightarrow\ & \frac{y'}{1-e^y} = 1 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{y'e^{-y}}{e^{-y}-1} = 1 \quad \text{(en multipliant en haut et en bas par } e^{-y}\text{)} \end{aligned}$$

   (b) On reconnait dans l'expression ci dessus une fonction de la forme $-\frac{u'}{u}$ avec $u = e^{-y} - 1$. En intégrant de chaque coté, on obtient

$$\begin{aligned} & \ln|e^{-y(t)} - 1| = -t + K \\ \Leftrightarrow\ & e^{-y(t)} - 1 = \lambda e^{-t} \\ \Leftrightarrow\ & y(t) = \ln\left(\frac{1}{\lambda e^{-t} + 1}\right), \quad \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

   En traçant quelques solutions, on retrouve les mêmes résultats que lors de l'étude qualitative. On constate en particulier que toutes les solutions tendent vers 0 en $+\infty$.

$\star\ \star$
$\star$