CONTRÔLE CONTINU

Équations différentielles.

Durée : 1h30 *Les calculatrices sont autorisées.*

Tous les exercices sont indépendants.
Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation.

Exercice 1 Soit

$$(E)\ :\ ty' - y = t^2$$

1. Donner les caractéristiques de l'équation (E).
2. Déterminer les intervalles de résolution I_1 et I_2 de l'équation (E).
3. Montrer que sur chaque intervalle de résolution I_j $(j \in \{1,2\})$, l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée à (E) est

$$\Sigma_j = \{y_{hj}\ :\ t \longmapsto \lambda_j\, t, \quad \lambda_j \in \mathbb{R}\}$$

4. Pour chaque intervalle I_j, déterminer une solution y_{pj} de (E) à l'aide de la méthode de variation de la constante.
5. Donner l'ensemble des solutions de (E) sur chacun de ses intervalles de résolution.
6. Montrer que l'équation (E) admet comme solutions définies <u>sur $\mathbb{R}$</u> l'ensemble des fonctions de la forme

$$\eta\ :\ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \lambda\, t + t^2 \end{array}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2

1. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation

$$(H)\ :\ y'' - 2y' + y = 0$$

2. On considère ici l'équation différentielle

$$(E)\ :\ y'' - 2y' + y = t^2$$

   (a) Montrer que l'équation (E) admet une solution polynomiale de la forme

$$y_p\ :\ t \longmapsto at^2 + bt + c$$

   dont on précisera les coefficients $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(b) Donner l'ensemble des solutions de (E).

3. On se place maintenant sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$ et on note

$$(\tilde{E})\ :\ t\tilde{y}'' + 2(1-t)\tilde{y}' + (t-2)\tilde{y} = t^2 - 6$$

et $(\tilde{H})$ l'équation homogène associée à $(\tilde{E})$.

(a) À quelle classe d'équations différentielles appartient l'équation $(\tilde{E})$?

(b) Montrer que si $\tilde{y}_h$ est une solution de l'équation $(\tilde{H})$ sur I, la fonction

$$z\ :\ t \longmapsto t\,\tilde{y}_h(t)$$

est une solution de (H).

(c) En déduire l'ensemble des solutions de $(\tilde{H})$.

(d) Montrer que l'équation $(\tilde{E})$ admet une solution sous la forme

$$\tilde{y}_p\ :\ t \longmapsto \alpha t + \beta$$

dont on précisera les coefficients $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(e) Donner l'ensemble des solutions de $(\tilde{E})$.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 On considère l'équation différentielle

$$(E)\ :\ y' = \alpha y\, \ln\left(\frac{K}{y}\right)$$

où α et K sont deux constantes strictement positives.

1. Donner les caractéristiques de l'équation (E).
2. Déterminer les solutions constantes de (E).
3. Dresser le tableau de signe de la fonction

$$F\ :\ x \longmapsto \alpha x\, \ln\left(\frac{K}{x}\right)$$

sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

4. Dans un repère (tOy), tracer l'esquisse de quelques unes des solutions de (E). On fera en particulier apparaître les solutions constantes.

⋆ ⋆
⋆

CORRECTION

Exercice 1 :

1. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire, d'ordre 1, non homogène et à coefficients variables.
2. L'équation (E) admet $t = 0$ comme unique valeur interdite. Les intervalles de résolution sont donc
$$I_1 =]-\infty, 0[\qquad \text{et} \qquad I_2 =]0, +\infty[$$
3. Sur chacun des intervalles I_j, l'équation homogène associée à (E) est
$$\begin{aligned}(H)\ :\ ty' - y = 0 \ &\Leftrightarrow\ \frac{y'}{y} = \frac{1}{t}\\ &\Leftrightarrow\ \ln|y_{hj}(t)| = \ln|t| + k = \begin{cases} \ln(-t) + k & \text{sur } I_1 \\ \ln(t) + k & \text{sur } I_2 \end{cases}\\ &\Leftrightarrow\ y_{hj}(t) = \lambda_j\, t, \quad \lambda_j = \pm e^k \in \mathbb{R}\end{aligned}$$
L'ensemble des solutions de (H) sur I_j est donc
$$\Sigma_j = \{y\ :\ t \longmapsto \lambda_j\, t, \quad \lambda_j \in \mathbb{R}\}$$
4. Sur l'intervalle I_j, on cherche une solution de (E) sous la forme
$$y_{pj}\ :\ t \longmapsto \lambda(t)\, t$$
On a alors
$$y'_{pj}(t) = \lambda'(t)\, t + \lambda(t)$$
et y_{pj} est une solution de (E) sur I_j si et seulement si, pour tout $t \in I_j$, on a
$$\begin{aligned} t\, y'_{pj}(t) - y_{pj}(t) = t^2 \ &\Leftrightarrow\ \lambda'(t)\, t^2 + \cancel{\lambda(t)\, t} - \cancel{\lambda(t)\, t} = t^2\\ &\Leftrightarrow\ \lambda'(t) = 1\end{aligned}$$
On pose $\lambda(t) = t$ et la fonction
$$y_{pj}\ :\ t \longmapsto t^2$$
est une solution de (E) sur I_j.

5. D'après les résultats obtenus aux questions précédentes, on a
$$\begin{aligned}&\text{Sur } I_1 : \Sigma_1 = \{y_1\ :\ t \longmapsto \lambda_1\, t + t^2, \quad \lambda_1 \in \mathbb{R}\}\\ &\text{Sur } I_2 : \Sigma_2 = \{y_2\ :\ t \longmapsto \lambda_2\, t + t^2, \quad \lambda_2 \in \mathbb{R}\}\end{aligned}$$
6. Soit η une solution de (E) définie sur $\mathbb{R}$. On note tout d'abord qu'en $t = 0$, l'équation (E) impose
$$0\, \eta'(0) - \eta(0) = 0^2 \ \Leftrightarrow\ \eta(0) = 0$$

Par ailleurs, la fonction η doit coïncider sur I_1 avec l'une des fonctions de l'ensemble Σ_1 et sur I_2 avec l'une des fonctions de l'ensemble Σ_2. Autrement dit, il existe deux constantes λ_1 et λ_2 réelles telles que

$$\begin{aligned} \forall t < 0, \quad \eta(t) = \lambda_1\, t + t^2 \\ \forall t > 0, \quad \eta(t) = \lambda_2\, t + t^2 \end{aligned}$$

On note alors que

$$\lim_{t \overset{<}{\to} 0} \eta(t) = \lim_{t \overset{>}{\to} 0} \eta(t) = 0$$

et que toutes les fonctions ainsi définies sont continues en 0.

Enfin, la fonction η doit être dérivable en 0. Or pour tout $t < 0$, on a

$$\frac{\eta(t) - \eta(0)}{t} = \lambda_1 + t \underset{t \overset{<}{\to} 0}{\longrightarrow} \lambda_1$$

et pour tout $t > 0$, on a

$$\frac{\eta(t) - \eta(0)}{t} = \lambda_2 + t \underset{t \overset{>}{\to} 0}{\longrightarrow} \lambda_2$$

La fonction η est donc dérivable en 0 si et seulement si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}$ et la fonction η est bien de la forme

$$t \longmapsto \lambda\, t + t^2$$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 :

1. L'équation (H) est une équation différentielle linéaire, homogène, à coefficients constants. Son polynôme caractéristique est

$$P(X) = X^2 - 2X + 1 = (X - 1)^2$$

Il admet donc $r_0 = 1$ comme unique racine double et l'ensemble des solutions de (H) est

$$\Sigma_H = \{y_h \,:\, t \longmapsto (\lambda + \mu t)\, e^t, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

2. (a) On cherche une solution de (E) sous la forme

$$y_p \,:\, t \longmapsto at^2 + bt + c$$

On a alors

$$y_p'(t) = 2at + b \qquad \text{et } y_p''(t) = 2a$$

La fonction y_p est alors une solution de (E) si et seulement si pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} y_p''(t) - 2y_p'(t) + y_p(t) = t^2 &\Leftrightarrow 2a - 2(2at + b) + at^2 + bt + c = t^2 \\ &\Leftrightarrow at^2 + (b - 4a)t + 2a - 2b + c = t^2 \end{aligned}$$

Par identification, on obtient le système

$$\left\{\begin{array}{lcl} a & = & 1 \\ b-4a & = & 0 \\ 2a-2b+c & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lclcl} a & = & 1 & & \\ b & = & 4a & = & 4 \\ c & = & 2b-2a & = & 6 \end{array}\right.$$

et la fonction polynomiale

$$y_p \,:\, t \longmapsto t^2+4t+6$$

est une solution de (E).

(b) D'après les résultats obtenus aux questions précédentes, l'ensemble des solutions de (E) est

$$\Sigma = \{y \,:\, t \longmapsto (\lambda+\mu t)e^t + t^2+4t+6, \quad (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\}$$

3. On note ici

$$(\tilde{E}) \,:\, t\tilde{y}'' + 2(1-t)\tilde{y}' + (t-2)\tilde{y} = t^2-6$$

et $(\tilde{H})$ l'équation homogène associée à $(\tilde{E})$.

(a) Il s'agit d'une équation différentielle linéaire, d'ordre 2, à coefficients non constants.

(b) Soient $\tilde{y}_h$ une solution de l'équation $(\tilde{H})$ et

$$z \,:\, t \longmapsto t\,\tilde{y}_h(t)$$

Pour tout $t\in I$, on a

$$z'(t) = \tilde{y}_h(t) + t\,\tilde{y}_h'(t)$$

et

$$z''(t) = \tilde{y}_h'(t) + \tilde{y}_h'(t) + t\tilde{y}_h''(t) = 2\tilde{y}_h'(t) + t\tilde{y}_h''(t)$$

et

$$\begin{aligned} z''(t) - 2z'(t) + z(t) &= 2\tilde{y}_h'(t) + t\tilde{y}_h''(t) - 2(\tilde{y}_h(t) + t\,\tilde{y}_h'(t)) + t\,\tilde{y}_h(t) \\ &= t\tilde{y}_h''(t) + 2(1-t)\tilde{y}_h'(t) + (t-2)\tilde{y}_h(t) \\ &= 0 \quad \text{car } \tilde{y}_h \text{ est une solution de } (\tilde{H}). \end{aligned}$$

(c) D'après les résultats obtenus ci-dessus, l'ensemble des solutions de (H) étant

$$\Sigma_H = \{t \longmapsto (\lambda+\mu t)e^t, \quad (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\}$$

l'ensemble des solutions de $(\tilde{H})$ sur I est

$$\begin{aligned} \Sigma_{\tilde{H}} &= \left\{\tilde{y}_h \,:\, t \longmapsto \frac{y_h(t)}{t}, \quad y_h\in\Sigma_H\right\} \\ &= \left\{\tilde{y}_h \,:\, t \longmapsto \left(\frac{\lambda}{t}+\mu\right)e^t, \quad (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\right\} \end{aligned}$$

(d) On cherche une solution à $(\tilde{E})$ sous la forme

$$\tilde{y}_p \,:\, t \longmapsto \alpha t + \beta$$

On a alors

$$\tilde{y}_p'(t) = \alpha \qquad \text{et} \qquad \tilde{y}_p''(t) = 0$$

La fonction $\tilde{y}_p$ est alors une solution de $(\tilde{E})$ sur I si et seulement si, pour tout $t \in I$, on a

$$\begin{aligned} t\tilde{y}_p''(t) + 2(1-t)\tilde{y}_p'(t) + (t-2)\tilde{y}_p(t) = t^2 - 6 &\Leftrightarrow 2\alpha(1-t) + (t-2)(\alpha t + \beta) = t^2 - 6 \\ &\Leftrightarrow \alpha t^2 + (\beta - 4\alpha)\, t + 2\alpha - 2\beta = t^2 - 6 \end{aligned}$$

Par identification, on obtient

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \alpha & = & 1 \\ \beta - 4\alpha & = & 0 \\ 2\alpha - 2\beta & = & -6 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} \alpha & = & 1 \\ \beta & = & 4 \end{array} \right.$$

et la fonction

$$\tilde{y}_p \,:\, t \longmapsto t + 4$$

est une solution du $(\tilde{E})$.

(e) En vertu du principe de superposition, l'ensemble des solutions de l'équation $(\tilde{E})$ est

$$\tilde{\Sigma} = \left\{ \tilde{y} \,:\, t \longmapsto \left(\frac{\lambda}{t} + \mu \right) e^t + t + 4, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 :

1. L'équation (E) est une équation différentielle d'ordre 1, non linéaire et autonome.
2. L'équation (E) est de la forme

$$y' = F(y)$$

où

$$F \,:\, x \longmapsto \alpha\, x \, \ln\left(\frac{K}{x} \right)$$

Les solutions constantes de (E) sont données par les solutions de l'équation

$$\begin{aligned} F(x) = 0 &\Leftrightarrow x \ln\left(\frac{K}{x} \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } \ln\left(\frac{K}{x} \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = K \end{aligned}$$

Les solutions constantes de (E) sont donc

$$y_1 \,:\, t \longmapsto 0 \qquad \text{et} \qquad y_2 \,:\, t \longmapsto K$$

3. La fonction F est définie sur $[0, +\infty[$ et, puisque

$$\ln\left(\frac{K}{x}\right) > 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{K}{x} > 1 \;\Leftrightarrow\; x < K$$

on a

x	0		K		$+\infty$
x	0	$+$		$+$	
$\ln\left(\frac{K}{x}\right)$		$+$	0	$-$	
$F(x)$	0	$+$	0	$-$	

4.