CONTRÔLE CONTINU

Intégrales généralisées, fonctions spéciales

Durée : 1h30. *Calculatrices autorisées.*

Tous les exercices sont indépendants
Il sera tenu compte de la rédaction et la présentation

Exercice 1 Soit $I(s,\alpha) = \displaystyle\int_{\alpha}^{+\infty} e^{-\frac{(t-\alpha)^2}{s}}\,dt$.

1. Montrer que $I(s,\alpha)$ converge pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et pour tout $s > 0$.
2. Montrer que
$$\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall s > 0, \quad I(s,\alpha) = \frac{\sqrt{s\pi}}{2}$$
(on rappelle que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$).

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 Soit
$$K(p) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx.$$

1. Montrer pour tout $p \in]0,1[$, $K(p)$ est convergente.
2. Montrer que pour si $0 < p < 1$, on a
$$K(p) = B(p, 1-p).$$
(On pourra poser $y = \frac{x}{1+x}$).
3. Calculer $K(1/2)$.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 Soit
$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4(t)\sin^4(t)\,dt.$$

1. Montrer en posant $u = \sin t$ que
$$I = \int_0^1 u^4(1-u^2)^{\frac{3}{2}}\,du$$
(on rappelle que $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$).
2. En déduire que
$$I = \frac{1}{2}\mathrm{Beta}\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right).$$
3. Donner la valeur exacte de I.

⋆ ⋆
⋆