CONTRÔLE CONTINU

Intégrales généralisées, fonctions spéciales

Durée : 1h30. *Calculatrices autorisées.*

Tous les exercices sont indépendants
Il sera tenu compte de la rédaction et la présentation

Exercice 1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t^2}\,dt$$

1. Montrer que I_n converge pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. *Cas impair.*
   Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on note
   $$J_p = \int_0^{+\infty} t^{2p-1} e^{-t^2}\,dt$$
   (a) Montrer que $J_1 = \dfrac{1}{2}$.
   (b) Montrer à l'aide d'une intégration par parties que
   $$\forall p \in \mathbb{N}^*, \qquad J_{p+1} = pJ_p$$
   (c) Montrer par récurrence que
   $$\forall p \in \mathbb{N}^*, \qquad J_p = \frac{(p-1)!}{2}.$$
3. *Cas pair.*
   Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on pose
   $$K_p = \int_0^{+\infty} t^{2p} e^{-t^2}\,dt.$$
   (a) Montrer que $K_0 = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.
   (b) Montrer que
   $$\forall p \in \mathbb{N}, \qquad K_{p+1} = \frac{2p+1}{2} K_p$$
   (c) En déduire une expression de K_p pour tout $p \in \mathbb{N}$.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 Soient $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^4}}\,dt$ et $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{1-t^4}}\,dt$.

1. Déterminer le domaine de définition de $f \,:\, t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t^4}}$.
2. Montrer que les intégrales I et J sont convergentes (on pourra effectuer un changement de variable pour ramener le problème en 0).
3. Montrer que
$$I = \frac{1}{4}\mathrm{Beta}\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) \qquad \text{et} \qquad J = \frac{1}{4}\mathrm{Beta}\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right).$$
4. En déduire la valeur du produit $I \times J$.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 Soit
$$I = \int_0^{\pi} \sin^4(t)\,dt.$$

1. Montrer à l'aide d'un changement de variable que
$$I = 2^5 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4(u)\cos^4(u)\,du$$
(on rappelle que $\sin(2u) = 2\sin u \cos u$).
2. En posant $v = \cos^2(u)$, montrer que
$$I = 2^4 \mathrm{Beta}\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right).$$
3. En déduire la valeur exacte de I.

⋆ ⋆
⋆

CORRECTION

Exercice 1 :

1. Puisque $n \geqslant 0$, la fonction $t \mapsto t^n e^{-t^2}$ est définie en 0. Il suffit donc d'étudier la borne $+\infty$. Pour cela, on la compare à $t \mapsto \frac{1}{t^2}$:

   $$\lim_{t \to +\infty} \frac{t^n e^{-t^2}}{\frac{1}{t^2}} = \lim_{t \to +\infty} t^{n+2} e^{-t^2} = 0$$

   Donc la fonction étudiée est dominée par $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ qui est intégrable en $+\infty$. Il en est donc de même pour la fonction étudiée.

2. (a)
   $$J_1 = \int_0^{+\infty} t e^{-t^2} dt = \left[-\frac{1}{2} e^{-t^2} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}$$

   (b)
   $$J_{p+1} = \int_0^{+\infty} t^{2p+1} e^{-t^2} = \int_0^{+\infty} t^{2p}.t e^{-t^2} dt.$$

   On intègre par partie en dérivant $u(t) = t^{2p}$ et en intégrant $v'(t) = te^{-t^2}$ et l'on obtient la relation cherchée.

   (c) On pose $\mathcal{P}(p)$: « $J_p = \dfrac{(p-1)!}{2}$ »

   – *Initialisation* : d'après la question 2(a), on a $J_1 = \dfrac{1}{2} = \dfrac{(1-1)!}{2}$.
   Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

   – *Hérédité* : supposons qu'il existe un entier $p \geqslant 1$ tel que $\mathcal{P}(p)$ soit vraie. Alors :

   $$\begin{aligned} J_{p+1} &= pJ_p && \text{d'après 2(b)} \\ &= p\frac{(p-1)!}{2} && \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= \frac{p!}{2} && \text{par calcul} \\ &= \frac{((p+1)-1)!}{2} \end{aligned}$$

   Donc $\mathcal{P}(p+1)$ est encore vraie.

   – *Conclusion* : la propriété $\mathcal{P}(p)$ est vraie pour $p = 1$ et héréditaire. Elle est donc vraie pour tout $p \geqslant 1$.

3. (a)
   $$K_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

En effectuant le changement de variable $u = t^2$, on trouve

$$K_0 = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

(b) Comme plus haut, en isolant un facteur t, on a :

$$K_{p+1} = \int_0^{+\infty} t^{2p+1}.te^{-t^2}dt.$$

On intègre alors par parties en dérivant $u(t) = t^{2p+1}$ et en intégrant $v'(t) = te^{-t^2}$ et l'on obtient la relation cherchée.

(c) Comme plus haut, on va raisonner par récurrence. Cependant, il faut d'abord "deviner" la forme générale que l'on cherche à établir. Or la question précédente montre que pour passer de K_p à K_{p+1}, on multiplie par l'entier (impair) $2p+1$ et on divise par 2. On conjecture donc :

$$\mathcal{P}(p) \ : \ \text{“} \ K_p = \frac{1}{2^p}\prod_{j=0}^{p}(2j+1)\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Notes :
- Le facteur $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ vient de la valeur de K_0.
- Contrairement au cas pair, il n'existe pas de notation simplifiée pour le produit $\prod(2p+1)$ (quelle est cette notation simplifiée dans le cas pair ?).
- Pour "caler" la formule (et notamment les puissances de 2), on se base sur la valeur de K_0.
- C'est surement l'étape la plus difficile du devoir. Elle nécessite une recherche à tâtons, guidée par l'intuition.

Le raisonnement par récurrence est laissé au lecteur.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 :

1. La fonction étudiée est définie si et seulement si $1-t^4 > 0$. Son domaine de définition est donc $]-1,1[$.
2. D'après la question précédentes, les bornes "ouvertes" des intégrales I et J sont $t = 1$. On peut ramener le problème en 0 en effectuant le changement de variable $u = 1-t$ (ou $u = t-1$).

$$\begin{aligned} I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^4}}dt &= -\int_1^0 (1-(1-u)^4)^{-\frac{1}{2}}du \\ &= \int_0^1 (4u-6u^2+4u^3-u^4)^{-\frac{1}{2}}du \end{aligned}$$

Or au voisinage de 0, les puissances de u sont négligeables devant u. Autrement dit :

$$(4u-6u^2+4u^3-u^4)^{-\frac{1}{2}} \sim_0 (4u)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{u}}.$$

Puisque $u \mapsto \frac{1}{2\sqrt{u}}$ est intégrable en 0 (critère de Riemann), l'intégrale I converge.

Notes :

– On effectue exactement la même chose pour J. Le numérateur t^2 disparaît lorsque l'on passe à l'équivalence puisqu'il vaut ≈ 1 (quelque soit la variable étudiée).
– Il est possible de simplifier les calculs en remplaçant le changement de variable proposé par $v = 1 - t^4$. L'exercice est laissé au lecteur.

3. Les résultats souhaités s'obtiennent en effectuant le changement de variables $u = t^4$ dans I et J. Il suffit alors de compter les puissances de u et $(1-u)$ obtenues. Notons qu'il est, là encore possible d'effectuer plutôt le changement $v = 1-t^4$. Pour obtenir le résultat souhaiter, il faut alors utiliser le caractère symétrique de la fonction Beta :

$$\mathrm{Beta}(p,q) = \mathrm{Beta}(q,p).$$

4.

$$\begin{aligned} I \times J &= \frac{1}{4}\mathrm{Beta}\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{4}\mathrm{Beta}\left(\frac{3}{4},\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{16}.\frac{\Gamma(\frac{1}{4})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{3}{4})}.\frac{\Gamma(\frac{3}{4})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{5}{4})} \\ &= \frac{1}{16}.\frac{\cancel{\Gamma(\frac{1}{4})}\Gamma(\frac{1}{2})}{\cancel{\Gamma(\frac{3}{4})}}.\frac{\cancel{\Gamma(\frac{3}{4})}\Gamma(\frac{1}{2})}{\frac{1}{4}\cancel{\Gamma(\frac{1}{4})}} = \frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Note : il n'était pas demandé ici de calculer I et J. On ne connaît en effet pas la valeur exacte de $\Gamma(\frac{1}{4})$ ou $\Gamma(\frac{3}{4})$.
Autrement dit, on ne sait pas intégrer les fonctions $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t^4}}$ et $t \mapsto \frac{t^2}{\sqrt{1-t^4}}$.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 :

1. Il suffit d'effectuer ici le changement de variable $t = 2u$ et d'utiliser la formule rappelée.
2. En posant $v = \cos^2 u$, on a $dv = -2\sin u \cos u\, du$. Avant d'effectuer le changement de variable, il faut donc "faire apparaître de dv" et écrire la fonction à intégrer en fonction de $\cos^2 u$:

$$\begin{aligned} I &= -2^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 u)^{\frac{3}{2}} (\cos^2 u)^{\frac{3}{2}} (-2\sin u \cos u\, du) \\ &= -2^4 \int_1^0 (1-v)^{\frac{3}{2}} v^{\frac{3}{2}} dv \\ &= 2^4 \int_0^1 v^{\frac{5}{2}-1}(1-v)^{\frac{5}{2}-1} dv. \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} I &= 2^4 \frac{\Gamma(\frac{5}{2})\Gamma(\frac{5}{2})}{\Gamma(5)} = 2^4 \frac{\left(\frac{3}{2}.\frac{1}{2}.\Gamma(\frac{1}{2})\right)^2}{4!} \\ &= \frac{3\pi}{8} \end{aligned}$$