CONTRÔLE CONTINU

Intégrales généralisées, fonctions spéciales

Durée : 1h30. *Calculatrices autorisées.*

Tous les exercices sont indépendants
Il sera tenu compte de la rédaction et la présentation

Exercice 1 L'objectif de cet exercice est de démontrer que

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

où Γ est la fonction définie par $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$. Pour cela, on pose

$$f(x,t) = \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} \quad \text{et} \quad F(x) = \int_0^{+\infty} f(x,t)dt.$$

1. *Un calcul préliminaire.*
   Montrer que
   $$\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right).$$

2. *Étude de la fonction F.*
   (a) Montrer que $F(x)$ existe pour tout $x \geqslant 0$ et calculer $F(0)$ (on rappelle qu'une primitive de $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est $t \mapsto \arctan t$).
   (b) Montrer que
   $$\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$$
   (on pourra majorer la fonction la quantité $\frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}$ et conclure par encadrement).
   (c) En dérivant sous le signe intégral, montrer que
   $$\forall x \in]0,+\infty[, \quad F'(x) = -\frac{1}{2}\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right).$$
   (d) En intégrant F' sur $]0,+\infty[$, montrer que
   $$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2.$$
   (e) Conclure.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 Soit $K(p,q) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}\,dt$.

1. Montrer que $K(p,q)$ converge pour $p,q>0$.
2. À l'aide du changement de variable $u = \frac{t}{1+t}$, montrer que

$$\forall p,q>0, \quad K(p,q) = \mathrm{Beta}(p,q) = \int_0^1 u^{p-1}(1-u)^{q-1}du.$$

3. *Application* : soit $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{5t}}{(e^{2t}+1)^4}\,dt$.
   (a) Montrer que I est convergente.
   (b) Montrer que $I = \frac{1}{2}K\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right)$. (On pourra poser $u = e^{2t}$).
   (c) En déduire la valeur exacte de I.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)dt.$$

1. Calculer I_0 et I_1.
2. En posant $u = \sin t$, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad I_n = \int_0^1 (1-u^2)^{\frac{n-1}{2}}du.$$

3. À l'aide d'un second changement de variable, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad I_n = \frac{1}{2}\mathrm{Beta}\left(\frac{1}{2},\frac{n+1}{2}\right).$$

4. Calculer I_2 et I_3.

⋆ ⋆
⋆

CORRECTION

Exercice 1 :

1. C'est un résultat classique que l'on obtient en effectuant le changement de variable $t = u^2$ dans l'intégrale de Gauss $\displaystyle\int_0^\infty e^{-u^2} du$.

2. (a) L'intégrale $F(x)$ est généralisée en $+\infty$. Or pour tout $x \geqslant 0$, on a
$$f(x,t) = \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} \leqslant \frac{1}{t^2}.$$
On reconnaît à droite de l'inégalité une fonction de Riemann de paramètre $\alpha = 2 > 1$ qui est intégrable en $+\infty$. La fonction $t \mapsto f(x,t)$ est donc intégrable en $+\infty$ par majoration.
Par définition, on a
$$F(0) = \int_0^\infty \frac{1}{1+t^2} = [\arctan(t)]_0^\infty = \frac{\pi}{2}.$$

   (b) Pour tout $t \geqslant 0$, on a
$$0 \leqslant f(x,t) = \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} \leqslant \frac{e^{-x}}{1+t^2}.$$
Donc
$$0 \leqslant F(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{1+t^2} dt.$$
Or
$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{1+t^2} dt &= e^{-x} [\arctan(t)]_0^{+\infty} \\ &= \frac{\pi}{2} e^{-x} \\ &\to 0 \text{ quand } x \to +\infty \end{aligned}$$
Par encadrement, on obtient pour $F(x)$ la limite voulue.

   (c) En admettant que la fonction F soit dérivable, on a
$$F'(x) = \int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) dt = \int_0^\infty -e^{-x(1+t^2)} dt = -e^{-x} \int_0^\infty e^{-xt^2} dt.$$
On obtient alors la forme voulue en effectuant dans la dernière intégrale, le changement de variable $u = xt^2$.

   (d) Étant donné le lien qu'il existe entre une fonction et sa dérivée, on a
$$\begin{aligned} \forall x > 0, \quad F(x) &= F(0) + \int_0^x F'(t) dt \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt \end{aligned}$$

Et en passant à la limite $x \to +\infty$ dans la dernière égalité, on obtient

$$0 = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

d'où l'on tire le résultat cherché.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 :

1. À cause du facteur t^{p-1} présent dans la fonction à intégrer, la borne 0 pose problème. Il faut donc étudier les deux bornes de l'intégrale $K(p,q)$. Soit $f(t) = \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}$.
   - En 0 : $f(t) \sim_0 t^{p-1} = \dfrac{1}{t^{1-p}}$.
     On reconnaît une fonction de Riemann de paramètre $\alpha = 1-p$. Cette fonction (et donc la fonction f) est intégrable en 0 si et seulement si $1-p<1$, i.e. $p>0$.
   - En $+\infty$: $f(t) \sim_\infty \dfrac{t^{p-1}}{t^{p+q}} = \dfrac{1}{t^{q+1}}$.
     On reconnaît là encore une fonction de Riemann de paramètre $\alpha = q+1$. Il y a donc convergence en $+\infty$ si et seulement si $q+1>1$, i.e. $q>0$.

2. Si l'on pose $u = \frac{t}{1+t}$, on a $t = \frac{u}{1-u}$, $1+t = \frac{1}{1-u}$ et $dt = \frac{1}{(1-u)^2}du$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
K(p,q) &= \int_0^{\infty} \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}dt \\
&= \int_0^1 \left(\frac{u}{1-u}\right)^{p-1} (1-u)^{p+q}\,\frac{1}{(1-u)^2}du \\
&= \int_0^1 u^{p-1}(1-u)^{q-1}du
\end{aligned}$$

   On reconnaît la fonction Beta.

3. Soit $g(t) = \dfrac{e^{5t}}{(e^{2t}+1)^4}$.
   (a) Pour établir la convergence de I, on doit étudier les deux bornes :
   - En $+\infty$: $g(t) \sim_{+\infty} \dfrac{e^{5t}}{(e^{2t})^4} = e^{-3t}$.
     On reconnaît ici une fonction exponentielle de paramètre $\lambda = 3 > 0$, ce qui donne l'intégrabilité de g en $+\infty$.
   - En $-\infty$: on effectue dans I le changement de variable $u = -t$ pour ramener le problème en $+\infty$. On a alors

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-5u}}{(e^{-2u}+1)^4}du.$$

     En posant $\tilde{g}(u) = \dfrac{e^{-5u}}{(e^{-2u}+1)^4}$, on a $\tilde{g}(u) \sim_{+\infty} e^{-5u}$. On obtient là encore une exponentielle intégrable en $+\infty$.

(b) En posant $u = e^{2t}$ dans I, on a $du = 2e^{2t}dt$ et

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{5t}}{(e^{2t}+1)^4}dt \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{5t}}{(e^{2t}+1)^4 e^{2t}}(2e^{2t})dt \\ &= \frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty} \frac{u^{\frac{5}{2}}}{u(u+1)^4}du \\ &= \frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty} \frac{u^{\frac{3}{2}}}{(u+1)^4}du \end{aligned}$$

On reconnaît ici $\frac{1}{2}K(p,q)$ avec $\left\{\begin{array}{rcl} p-1 &=& \frac{3}{2} \\ p+q &=& 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} p &=& \frac{5}{2} \\ q &=& \frac{3}{2} \end{array}\right.$.

(c) D'après les questions précédentes, on a

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}K\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{Beta}\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right) \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{2\Gamma(4)} \\ &= \frac{\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2.3!} \\ &= \frac{\pi}{2^5} \end{aligned}$$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 :

1. $I_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt = [\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$
2. En posant $u = \sin t$, on a $du = \cos t dt$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{n-1}.\cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 t)^{\frac{n-1}{2}}.\cos t dt = \int_0^1 (1-u^2)^{\frac{n-1}{2}} du$$

3. Pour obtenir la formule voulue, on effectue le changement de variable $x = u^2$ dans la dernière intégrale obtenue.
4.

$$I_2 = \frac{1}{2}\mathrm{Beta}\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{2\Gamma(2)} = \frac{\pi}{4}$$

$$I_3 = \frac{1}{2}\mathrm{Beta}\left(\frac{1}{2},2\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(2)}{2\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} = \frac{2}{3}$$