CONTRÔLE CONTINU

Intégrales généralisées, fonctions spéciales

Durée : 1h30. *Calculatrices autorisées.*

Tous les exercices sont indépendants
Il sera tenu compte de la rédaction et la présentation

Exercice 1 Déterminer la nature de chacune des intégrales ci-dessous (on pourra donner dans chaque cas, un équivalent simple de la fonction à intégrer au voisinage de la borne ouverte).

$$I_1 = \int_0^1 \sqrt{\frac{1}{t^3+t}}dt, \qquad I_2 = \int_1^{+\infty} \sqrt{\frac{1}{t^3+t}}dt, \qquad I_3 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{e^t-1}dt, \qquad I_4 = \int_0^1 \frac{1}{e^t-1}dt$$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 Pour $p \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{R}$, on note

$$f_{p,q}(t) = t^{q-1}(\ln t)^{p-1} \qquad \text{et} \qquad I(p,q) = \int_0^1 f_{p,q}(t)dt$$

1. *Étude de la convergence*
   (a) Montrer que si $q > 0$, la fonction $f_{p,q}$ est intégrable sur $]0,1]$ (on pourra comparer $f_{p,q}$ à une fonction de Riemann intégrable en 0).
   (b) Montrer que si $q \leqslant 0$, la fonction $f_{p,q}$ n'est pas intégrable sur $]0,1]$ (on pourra ici comparer $f_{p,q}$ à une fonction de Riemann non intégrable en 0).
   (c) En déduire la nature de l'intégrale $I(p,q)$ en fonction de $p \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{R}$.

2. *Calcul de $I(p,q)$*
   (a) Montrer que
   $$\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall q > 0, \qquad I(p,q) = \frac{(-1)^{p-1}}{q^p}\Gamma(p)$$
   (On pourra commencer par poser le changement de variable $u = -\ln t$).
   (b) En déduire la valeur exacte de $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{t}}dt$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on note

$$f_a(t) = \ln\left(1 + \frac{1}{t^a}\right)$$

L'objectif de cet exercice est d'étudier l'intégrabilité de f_a sur l'intervalle $]0, +\infty[$ en fonction du paramètre a.

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln t dt$ converge.
2. <u>Étude en 0</u> :
   (a) Montrer que si $a \neq 0$, on a
   $$f_a(t) \underset{0}{\sim} -a \ln t$$
   (b) En déduire la nature de $\displaystyle\int_0^1 f_a(t)dt$ en fonction de $a \in \mathbb{R}$.
3. <u>Étude en $+\infty$</u> :
   (a) Montrer que si $a > 0$, alors f_a est intégrale sur $[1, +\infty[$ si et seulement si $a > 1$ (on pourra s'appuyer sur le développement limité du logarithme en 0 : $\ln(1+u) = u + o(u)$).
   (b) Montrer que si $a \leqslant 0$, la fonction f_a n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$ (on pourra distinguer les cas $a = 0$ et $a < 0$).
4. Donner la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_a(t)dt$ en fonction de $a \in \mathbb{R}$.

$\star\ \star$
$\star$

CORRECTION

Exercice 1 :

1. Dans I_1, la borne ouverte est 0. Or

$$f(t) = \sqrt{\frac{t^2+1}{t}} \underset{0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$$

On reconnaît ici une fonction de Riemann de paramètre $\alpha = \frac{1}{2}$. Cette fonction étant intégrable en 0, l'intégrale I_1 converge.

2. En l'infini, on a

$$f(t) \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{t}$$

Donc $\lim_{+\infty} f \neq 0$ et l'intégrale I_2 diverge.

3. En $+\infty$, on a

$$g(t) = \frac{1}{e^t - 1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{e^t} = e^{-t}$$

On reconnaît ici une fonction exponentielle de paramètre $\lambda = 1 > 0$. Cette fonction étant intégrable en $+\infty$, l'intégrale I_3 converge.

4. En 0, on a

$$e^t = 1 + t + o(t)$$

donc

$$g(t) = \frac{1}{t + o(t)} \underset{0}{\sim} \frac{1}{t}$$

On reconnaît ici une fonction de Riemann de paramètre $\alpha = 1$. Cette fonction n'étant pas intégrable sur $]0, 1]$, l'intégrale I_4 diverge.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 :

1. La fonction ln, définie sur $]0, 1]$, est dominée en 0 par n'importe quelle puissance de $\frac{1}{t}$, en particulier par $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$. Cette dernière fonction étant intégrable en 0, il en est de même pour ln.

2. Étude en 0 :
   (a) Pour établir l'équivalence demandée, on étudie la limite du quotient en 0. Ainsi, pour $a \neq 0$, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{f_a(t)}{-a\ln t} &= \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{t^a}\right)}{-a\ln t} \\
&= \frac{\ln\left[\frac{1}{t^a}(t^a + 1)\right]}{-a\ln t} \\
&= \frac{\ln\frac{1}{t^a} + \ln(t^a + 1)}{-a\ln t} \\
&= 1 - \frac{\ln(t^a + 1)}{a\ln t} \\
&\underset{0}{\longrightarrow} 1
\end{aligned}$$

   L'équivalence cherchée est donc établie.

(b) D'après la question 1, la fonction $t \mapsto \ln t$ est intégrable sur $]0,1]$. Il en est donc de même pour $-a\ln t$ et donc pour f_a quelques soit $a \neq 0$. D'autre part, $f_0(t) = \ln 2$ est définie en 0, elle est intégrable sur $[0,1]$. Autrement dit, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f_a(t)dt$ converge quelque soit $a \in \mathbb{R}$.

3. Étude en $+\infty$:

(a) Si $a > 0$, on a $\displaystyle\lim_{+\infty} \frac{1}{t^a} = 0$. Ainsi, on a

$$f_a(t) = \frac{1}{t^a} + o\left(\frac{1}{t^a}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^a}$$

On reconnaît ici une fonction de Riemann de paramètre a. Celle-ci étant intégrable sur $[1,+\infty[$ si et seulement si $a > 1$, il en est de même pour f_a.

(b) Si $a < 0$, on a $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t^a} = +\infty$. Donc $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f_a(t) = +\infty$. La fonction f_a n'est donc pas intégrable en $+\infty$.
De même $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f_0(t) = \ln 2 \neq 0$. f_0 n'est donc pas intégrable sur $[1,+\infty[$ et l'intégrale de f_a sur $[1+\infty[$ diverge quelque soit $a \leqslant 0$.

4. D'après les questions précédentes, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_a(t)dt$ converge si et seulement si $a > 1$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 :

1. (a) Soit $q > 0$. On cherche ici une fonction de la forme $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ que l'on puisse comparer à $f_{p,q}$ au voisinage de 0. Or

$$\frac{f_{p,q}(t)}{\frac{1}{t^\alpha}} = t^{q+\alpha-1}(\ln t)^{p-1}$$

Pour tout α tel que $q+\alpha-1$, le quotient ci-dessus tend vers 0 en 0. $f_{p,q}$ est donc dominée en 0 par toute fonction de Riemann de paramètre $\alpha > 1-q$. Mais puisque $q > 0$, il existe un tel paramètre α vérifiant en outre $\alpha < 1$ (par exemple $\alpha = 1 - \frac{q}{2}$). Dans ce cas, la fonction $f_{p,q}$ est dominée, au voisinage de 0 par une fonction de Riemann intégrable en 0.

(b) Si $q \leqslant 0$, le quotient $\dfrac{f_{p,q}(t)}{\frac{1}{t}} = t^q(\ln t)^{p-1}$ ne tend pas vers 0 en 0. La fonction $f_{p,q}$ domine donc (au sens large) la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$. Cette dernière n'étant pas intégrable en 0, $f_{p,q}$ n'est pas intégrable sur $]0,\frac{1}{2}]$.

(c) D'après les différentes études précédentes, l'intégrale $I(p,q)$ converge pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $q > 0$.

2. (a) En posant $u = -\ln t$, on a $t = e^{-u}$, $dt = -e^{-u}du$ et

$$\begin{aligned} I(p,q) = \int_{t=0}^1 t^{q-1}(\ln t)^{p-1}dt &= \int_{u=+\infty}^0 e^{-u(q-1)}(-u)^{p-1}(-e^{-u}du) \\ &= (-1)^{p-1}\int_0^{+\infty} u^{p-1}e^{-qu}du \end{aligned}$$

On pose alors $v = qu$. On a $u = \frac{v}{q}$, $du = \frac{dv}{q}$ et

$$\begin{aligned} I(p,q) &= (-1)^{p-1}\int_{u=0}^{+\infty} u^{p-1}e^{-qu}du \\ &= (-1)^{p-1}\int_{v=0}^{+\infty} \left(\frac{v}{q}\right)^{p-1} e^{-v}\left(\frac{dv}{q}\right) \\ &= \frac{(-1)^{p-1}}{q^p}\Gamma(p) \end{aligned}$$

(b) Avec les notations précédentes, on a

$$I = \int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{t}} dt = \int_0^1 t^{\frac{1}{2}-1} (\ln t)^{2-1} dt = I\left(2, \frac{1}{2}\right) = \frac{-1}{\frac{1}{4}} \Gamma(2) = -4$$