CONTRÔLE CONTINU

Fonctions spéciales

Durée : 1h30. *Calculatrices autorisées*

Tous les exercices sont indépendants
Il sera tenu compte de la rédaction et la présentation

Exercice 1 Soit
$$I = \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} dt$$

1. Montrer que l'intégrale I est convergente (on commencera par étudier le domaine de définition de la fonction $[t \mapsto \frac{t-1}{\ln t}]$).
2. Montrer que pour tout $t \in]0,1[$, on a
$$\frac{t-1}{t} \leqslant \ln t \leqslant t-1$$
(on pourra étudier les fonctions $[t \mapsto \ln t - \frac{t-1}{t}]$ et $[t \mapsto \ln t - (t-1)]$).
3. À l'aide du changement de variable $x = t^2$, montrer l'égalité
$$\int_0^X \frac{t}{\ln t} dt = \int_0^{X^2} \frac{1}{\ln x} dx$$
4. En déduire un encadrement de l'intégrale $\displaystyle\int_0^X \frac{t-1}{\ln t} dt$ puis montrer que
$$\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} dt = \ln 2$$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 Soit $a > 0$ fixé. Pour tout $b \in \mathbb{R}$, on note
$$J(b) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(x+ib)^2} dx \qquad \text{et} \qquad I = J(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx$$

1. Montrer que l'intégrale I converge.
2. À l'aide d'un changement de variable, montrer que $I = \frac{1}{\sqrt{a}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ (avant d'effectuer le changement de variable, on ramènera l'intégrale I sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par un argument de parité).
3. En dérivant sous le signe intégral, montrer que $J'(b) = 0$ et en déduire $J(b)$.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 Soit

$$I(p,q) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2p-1}(\cos t)^{2q-1}dt$$

1. Montrer à l'aide du changement de variables $u = \sin^2 t$ que

$$I(p,q) = \frac{1}{2}\text{Beta}(p,q)$$

2. En déduire les valeurs de p et q pour lesquelles l'intégrale $I(p,q)$ converge.
3. À l'aide de valeurs bien choisies de p et q, en déduire la valeur de $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ (on pourra exploiter le lien qui existe en la fonction Beta et la fonction Γ).

⋆ ⋆
⋆

CORRECTION

Exercice 1 :

1. La fonction ln étant définie sur $]0,+\infty[$ et valant 0 en 1, le domaine de la fonction que l'on souhaite intégrer est $]0,1[\cup]1,+\infty[$. Les deux bornes posent donc problème :

   — En 0 : on a
   $$\lim_{t\to 0}\ln(t) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{t\to 0} t-1 = -1$$
   donc
   $$\lim_{t\to 0}\frac{t-1}{\ln(t)} = 0$$
   Cette limite étant finie (et la borne étant finie aussi), la fonction est intégrable en 0.

   — En 1 : on pose $u = 1-t$ pour ramener le problème en 0. On a alors
   $$\int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)}dt = \int_1^0 \frac{-u}{\ln(1-u)}(-du) = -\int_0^1 \frac{u}{\ln(1-u)}du$$
   D'autre part, $\ln(1-u) = -u + o(u)$ au voisinage de 0. Donc
   $$\frac{u}{\ln(1-u)} = \frac{u}{-u+o(u)} = \frac{1}{-1+o(1)} \to -1$$
   Donc la encore, la limite étant finie, la fonction $[u \mapsto \frac{u}{\ln(1-u)}]$ est intégrable en 0 et la fonction étudiée est intégrable en 1.

2. Pour établir l'encadrement souhaité, on étudie les deux fonctions “différences” :

   — On note $\phi(t) = \ln(t) - t + 1$. ϕ est dérivable sur $]0,1[$ et
   $$\phi'(t) = \frac{1}{t} - 1 = \frac{1-t}{t}$$
   Pour tout $t \in]0,1[$, on a donc $\phi'(t) > 0$. La fonction ϕ est donc strictement croissante sur $]0,1[$. Puisque en outre $\phi(1) = 0$, on a $\phi(t) \leqslant 0$ pour tout $t \in]0,1[$ et $\ln(t) \leqslant t-1$.

   — On note $\psi(t) = \ln(t) - \frac{t-1}{t} = \ln(t) - 1 + \frac{1}{t}$. Là encore, ψ est dérivable sur $]0,1[$ et
   $$\psi'(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} = \frac{t-1}{t^2} < 0$$
   pour tout $t \in]0,1[$. La fonction ψ est donc décroissante sur $]0,1[$. Puisqu'en outre $\psi(1) = 0$, on a $\psi(t) \geqslant 0$ pour tout $t \in]0,1[$ et $\ln(t) \geqslant \frac{t-1}{t}$.

— En posant $x = t^2$, on a $t = \sqrt{x}$ et $dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$. Ainsi

$$\int_0^X \frac{t}{\ln(t)}dt = \int_0^{X^2} \frac{\cancel{\sqrt{x}}}{\ln(\sqrt{x})}\frac{1}{2\cancel{\sqrt{x}}}dx = \int_0^{X^2} \frac{1}{\cancel{\frac{1}{2}}\ln x}\frac{1}{\cancel{2}}dx = \int_0^X \frac{1}{\ln x}dx$$

3. L'encadrement se déduit de l'encadrement de $\ln(t)$ établi à la question 2 et du découpage :

$$\begin{aligned} I(X) &= \int_0^X \frac{t-1}{\ln t}dt = \int_0^X \frac{t}{\ln t}dt - \int_0^X \frac{1}{\ln t}dt \\ &= \int_0^{X^2} \frac{1}{\ln t}dt - \int_0^X \frac{1}{\ln t}dt = \int_X^{X^2} \frac{1}{\ln t}dt \end{aligned}$$

Ainsi, d'après l'encadrement établi à la question 2, on a

$$\frac{1}{t-1} \leqslant \frac{1}{\ln t} \leqslant \frac{t}{t-1}$$

On a donc

$$\int_X^{X^2} \frac{1}{t-1}dt \leqslant \int_X^{X^2} \frac{1}{\ln t}dt \leqslant \int_X^{X^2} \frac{t}{t-1}dt$$

Or

$$\int_X^{X^2} \frac{1}{t-1}dt = [\ln|t-1|]_X^{X^2} = \ln(1-X^2) - \ln(1-X) = \ln(1+X)$$

et

$$\begin{aligned} \int_X^{X^2} \frac{t}{t-1}dt &= \int_X^{X^2} \frac{t-1+1}{t-1}dt \\ &= \int_X^{X^2} 1 + \frac{1}{t-1}dt \\ &= [t + \ln|t-1|]_X^{X^2} = X^2 + \ln(1-X^2) - X - \ln(1-X) \\ &= X(X-1) + \ln(1+X) \end{aligned}$$

Ainsi

$$\ln(1+X) \leqslant I(X) \leqslant X(X-1) + \ln(1+X)$$

Puisque $I = \lim_{X\to 1} I(X)$, obtient la valeur cherchée pour I en passant à la limite $X \to 1$ dans la chaîne d'inégalités ci-dessus : les deux bornes tendant vers $\ln 2$, il en va de même pour $I(X)$.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 :

1. On a $I = J(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx$. Les deux bornes étant infinies, elles posent problème. Cependant, puisque la fonction $[x \mapsto e^{-ax^2}$ est paire, on peut réduire l'étude à la borne $+\infty$. Or en $+\infty$, la fonction $[x \mapsto e^{-ax^2}]$ tend vers 0 plus rapidement qu'une fonction exponentielle. Précisément,
$$\frac{e^{-ax^2}}{e^{-x}} = e^{-ax^2+x} \to 0$$
Donc e^{-ax^2} est dominée par e^{-x} qui est une fonction intégrable en $+\infty$. Par domination, il en est de même pour e^{-ax^2} et l'intégrale I converge.

2. Par parité, on a
$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = 2\int_{0}^{+\infty} e^{-ax^2} dx$$
En effectuant le changement de variable $u = ax^2$ dans la dernière intégrale, on retrouve la fonction Γ et l'on établi le résultat voulu.
3. J étant fonction de b, on obtient la dérivée $J'(b)$ en dérivant sous le signe intégral **par rapport à** b :
$$\begin{aligned}
J'(b) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial b}(e^{-a(x+ib)^2}) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial b}(e^{-ax^2-2aibx+ab^2}) dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} (-2aix + 2ab) e^{-a(x+ib)^2} dx \\
&= i\int_{-\infty}^{+\infty} (-2ax - 2aib) e^{-a(x+ib)^2} dx \\
&= i\int_{-\infty}^{+\infty} u'(x) e^{u(x)} dx \quad \text{avec } u(x) = -a(x+ib)^2 \\
&= i\left(\lim_{x\to+\infty} e^{u(x)} - \lim_{x\to-\infty} e^{u(x)}\right) = i(0-0) = 0
\end{aligned}$$

4. La fonction J' étant nulle, la fonction J est constante. Autrement dit,
$$\forall b \in \mathbb{R}, \qquad J(b) = J(0) = I = \frac{1}{\sqrt{a}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 :

1. En posant $u = \sin^2 t$, on a $du = 2\sin t \cos t dt$ et

$$\begin{aligned} I(p,q) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2p-2} (\cos t)^{2q-2} \sin t \cos t dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^2 t\right)^{p-1} \left(1-\sin^2 t\right)^{q-1} (2\sin t \cos t) dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 u^{p-1}(1-u)^{q-1} du = \frac{1}{2}\mathrm{Beta}(p,q) \end{aligned}$$

2. D'après le calcul précédent, le domaine de définition de la fonction I est le même que celui de Beta. L'intégrale $I(p,q)$ converge donc pour $p > 0$ et $q > 0$.
3. Pour $p = q = \frac{1}{2}$, on a

$$I\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2.\frac{1}{2}-1} (\cos t)^{2.\frac{1}{2}-1} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2}$$

   D'autre part, d'après les questions précédentes, on a

$$I\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\mathrm{Beta}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2\Gamma(1)} = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

   On retrouve ainsi $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

⋆ ⋆
⋆