CONTRÔLE CONTINU

Fonctions d'une variable réelle

Tous les exercices sont indépendants. *Calculatrices autorisées*
Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation.

Exercice 1 Soit $f\ :\ x \longmapsto \dfrac{x}{1-x}$

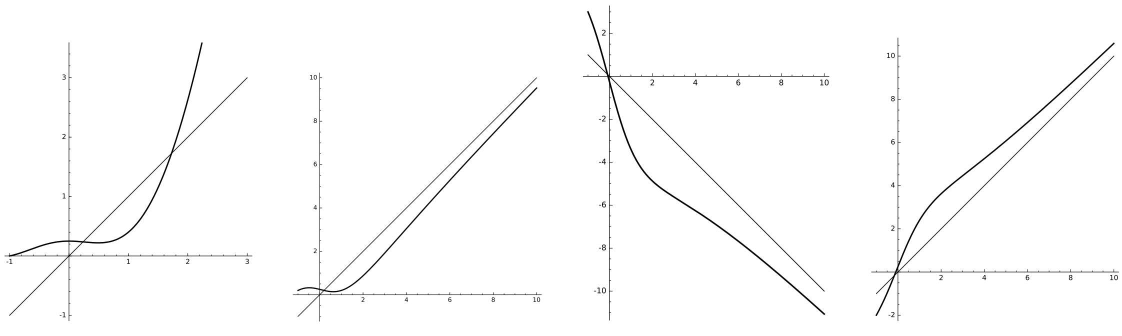
1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Déterminer le domaine de définition et l'expression de la fonction $f^2 = f \circ f$.
3. Conjecturer le domaine de définition et l'expression $f^n(x) = \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ fois}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ puis démontrer la conjecture.

$\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star$

Exercice 2 On souhaite associer l'un des graphes ci-dessous à la fonction

$$f\ :\ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x^3+x+1}{x^2+4} \end{array}$$

A B C D



1. Déterminer un équivalent de f en $+\infty$.
2. Éliminer deux des quatre graphes proposés. On justifiera ses choix.
3. En s'appuyant sur un développement asymptotique de la fonction f en $+\infty$, déterminer la bonne courbe de f parmi les deux graphes restants.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 Soit f la fonction réelle définie par $f(x) = \dfrac{\sin(x) - x}{x^3}$

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Calculer le développement limité de f à l'ordre 2 en 0.
3. Montrer que f se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}$ (encore notée f). On précisera la valeur de ce prolongement en 0.
4. Montrer que le prolongement obtenu à la question précédente est dérivable en 0 et donner la valeur de $f'(0)$.
5. Montrer que 0 est un extremum local de la fonction prolongée dont on précisera la nature (minimum ou maximum).

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 4 Soient a, b deux réels strictement positifs fixés. On souhaite calculer la limite

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}}$$

1. *Calculs préliminaires*
   (a) Montrer que $\ln(u) \underset{u \to 1}{\sim} u - 1$.
   (b) Calculer la limite $\lim_{t \to 0} \dfrac{e^t - 1}{t}$.
2. Montrer que $\dfrac{1}{x} \ln \left(\dfrac{a^x + b^x}{2} \right) \underset{x \to 0}{\sim} \dfrac{1}{2} \left(\dfrac{e^{x \ln(a)} - 1}{x} + \dfrac{e^{x \ln(b)} - 1}{x} \right)$
3. En déduire la limite $\lim_{x \to 0} \dfrac{1}{x} \ln \left(\dfrac{a^x + b^x}{2} \right)$ puis la limite $\lim_{x \to 0} \left(\dfrac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}}$.

⋆ ⋆
⋆

Développements limités usuels en 0	
$e^s \underset{0}{=} 1 + s + \dfrac{s^2}{2} + \ldots + \dfrac{s^n}{n!} + o(s^n)$	$\ln(1+s) \underset{0}{=} s - \dfrac{s^2}{2} + \ldots + \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} s^n + o(s^n)$
$\dfrac{1}{1-s} \underset{0}{=} 1 + s + s^2 + \ldots + s^n + o(s^n)$	$\sin(s) \underset{0}{=} s - \dfrac{s^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \dfrac{s^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(s^{2n+1})$

CORRECTION

Exercice 1 :

1. La quantité $f(x) = \frac{x}{1-x}$ existe pour tout $x \neq 1$. Donc $D_f = \mathbb{R}\backslash\{1\}$.
2. Le calcul de $f \circ f(x)$ donne

$$\begin{aligned} f \circ f(x) = f\left(f(x)\right) &= f\left(\frac{x}{1-x}\right) \\ &= \frac{\frac{x}{1-x}}{1-\frac{x}{1-x}} = \frac{x}{(1-x)-x} = \frac{x}{1-2x} \end{aligned}$$

   Ainsi, la quantité $f \circ f(x)$ si $x \neq \frac{1}{2}$ et si la quantité $f(x)$ existe également. Donc $D_{f\circ f} = \mathbb{R}\backslash \left\{1, \frac{1}{2}\right\}$.
3. Au vue des calculs précédent, on conjecture que la propriété

$$\mathcal{P}(n)\ :\ \forall x \in \mathbb{R}\backslash\left\{1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}\right\}, \quad f^n(x) = \frac{x}{1-nx}$$

   est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(1)$ étant vrai par définition.

   Supposons alors qu'il existe un entier $n > 0$ tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vrai. On a

$$\begin{aligned} f^{n+1}(x) = f\left(f^n(x)\right) &= f\left(\frac{x}{1-nx}\right) && \text{puisque } \mathcal{P}(n) \text{ est vraie,} \\ &= \frac{\frac{x}{1-nx}}{1-\frac{x}{1-nx}} = \frac{x}{(1-nx)-x} \\ &= \frac{x}{1-(n+1)x} \end{aligned}$$

   Ainsi, la quantité $f^{n+1}(x)$ existe si $x \neq \frac{1}{n+1}$ et si $f^n(x)$ existe. Donc

$$D_{f^{n+1}} = D_{f^n}\backslash\left\{\frac{1}{n+1}\right\} = \mathbb{R}\backslash\left\{1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n+1}\right\}$$

   La propriété $\mathcal{P}(n)$ est donc héréditaire. Par récurrence, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 :

1.

$$f(x) = \frac{x^3\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{x^2\left(1+\frac{4}{x^2}\right)} = x.\left(\frac{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{1+\frac{4}{x^2}}\right)$$

   Ainsi,

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{1+\frac{4}{x^2}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

   et $\boxed{f(x) \underset{+\infty}{\sim} x}$.

2. En $+\infty$, la fonction f adopte une croissance linéaire, de taux 1. La courbe $\mathcal{C}_f$ admet donc une asymptote oblique de pente 1. Cela élimine donc le graphe A correspondant à une croissance plus rapide qu'une croissance linéaire, ainsi que le graphe C dont le comportement asymptotique es linéaire, mais de pente négative.
3. En posant $u = \frac{4}{x^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et en s'appuyant sur le développement limité
$$\frac{1}{1+u} \underset{0}{=} 1 - u + o(u)$$
on obtient
$$\frac{1}{1+\frac{4}{x^2}} = 1 - \frac{4}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$
et
$$\begin{aligned} f(x) &= x\left(1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)\left(1 - \frac{4}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &= x\left(1 - \frac{4}{x^2} + \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \end{aligned}$$
D'où
$$\boxed{f(x) = x - \frac{3}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)}$$
Le comportement linéaire de f en $+\infty$ étant représenté par la partie linéaire de ce développement limité, on en déduit que l'asymptote de f est la droite d'équation $y = x$. La différence $f(x) - x = -\frac{3}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$ est donc négative au voisinage de $+\infty$ et la courbe de f est située sous son asymptote lorsque $x \to +\infty$. C'est donc le graphe B qui représente la fonction f.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 :

1. La quantité $f(x)$ existe pour tout $x \neq 0$. Donc $D_f = \mathbb{R}^*$.
2. Pour obtenir le $\mathrm{DL}_2(0)$ de f, on doit "tirer" le développement limité de $\sin(x)$ à l'ordre 5 :
$$\begin{aligned} \frac{\sin(x) - x}{x^3} &= \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5) - x}{x^3} \\ &= -\frac{1}{6} + \frac{x^2}{5!} + o(x^2) \end{aligned}$$
3. D'après le développement limité calculé à la question précédente, on a $\lim_{x\to 0} f(x) = -\dfrac{1}{6}$. On peut donc prolonger la fonction f en 0 en posant $f(0) = -\frac{1}{6}$. La fonction f étant par ailleurs continue en tout point $x \neq 0$, la fonction ainsi prolongée est continue sur $\mathbb{R}$ tout entier.

4. La fonction prolongée est dérivable en 0 si le taux d'accroissement $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ admet une limite finie quand $x \to 0$. Or, d'après le développement limité calculé à la première question, on a

$$\begin{aligned}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \frac{-\frac{1}{6}+\frac{x^2}{5!}+o(x^2)+\frac{1}{6}}{x} \\ &= \frac{x}{5!}+o(x)\end{aligned}$$

Donc $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. La fonction prolongée est donc dérivable en 0 et $f'(0)=0$.

5. Toujours d'après le développement limité calculé à la première question, on a

$$f(x)-f(0) = \frac{x^2}{5!}+o(x^5)$$

Il existe donc un voisinage de 0 dans lequel le signe de la différence $f(x)-f(0)$ est donné par le signe du quotient $\frac{x^2}{5!}$. Dans ce voisinage, $f(x)-f(0)$ est donc positif. 0 est donc un minumum local de f.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 4 :

1. (a) Pour démontrer l'équivalence voulue, on doit calculer la limite $\lim\limits_{u\to 1}\dfrac{\ln(u)}{u-1}$. Pour cela, on pose $u=1+v$. On a alors $v=u-1 \underset{u\to 1}{\to} 0$. Ainsi

$$\begin{aligned}\frac{\ln(u)}{u-1} &= \frac{\ln(1+v)}{v} = \frac{v+o(v)}{v} \\ &= 1+o(1) \underset{v\to 0}{\longrightarrow} 1\end{aligned}$$

et l'équivalence est démontrée.

(b) En utilisant le développement limité de e^t en 0 à l'ordre 1, on a

$$\frac{e^t-1}{t} = \frac{1+t+o(t)-1}{t} = 1+o(1) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 1$$

2. On constate que

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x+b^x}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Donc, d'après l'équivalence établie à la question 1a, en posant $u=\frac{a^x+b^x}{2}$, on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right) &\underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x}\left(\frac{a^x+b^x}{2}-1\right) \\ &\underset{x\to 0}{\sim} \frac{e^{x\ln(a)}+e^{x\ln(b)}-2}{2x} \\ &\underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{2}\left(\frac{e^{x\ln(a)}-1}{x}+\frac{e^{x\ln(b)}-1}{x}\right)\end{aligned}$$

3. D'après la question 1b, puisque $x \ln(a) \underset{x \to 0}{\to} 0$, on a

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x \ln(a)} - 1}{x \ln(a)} = 1$$

Donc

$$\frac{e^{x \ln(a)} - 1}{x} = \ln(a) \frac{e^{x \ln(a)} - 1}{x \ln(a)} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} \ln(a)$$

et

$$\frac{e^{x \ln(b)} - 1}{x} = \ln(b) \frac{e^{x \ln(b)} - 1}{x \ln(b)} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} \ln(b)$$

Ainsi

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \ln\left(\frac{a^x + b^x}{2}\right) = \frac{1}{2}(\ln(a) + \ln(b)) = \ln\left(\sqrt{ab}\right)$$

et la fonction exponentielle étant continue, on a

$$\left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x} \ln\left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} e^{\ln\left(\sqrt{ab}\right)} = \sqrt{ab}$$

⋆ ⋆
⋆