CONTRÔLE CONTINU

Fonctions réelles d'une variable réelle.

Tous les exercices sont indépendants. *Calculatrices autorisées*
Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation.

Exercice 1 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

1. Écrire à l'aide des quantificateurs les propositions suivantes :
   (a) f est majorée.
   (b) f n'est pas majorée.

2. Écrire à l'aide des quantificateurs la proposition $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

3. Montrer que si f est <u>croissante et non majorée</u>, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

4. (a) Donner un exemple de fonction croissante dont la limite en $+\infty$ n'est pas infinie.
   (b) Donner un exemple de fonction non majorée dont la limite en $+\infty$ n'est pas infinie.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 1. *Un calcul préliminaire*

   (a) Montrer que si f est une fonction définie et dérivable au voisinage d'un point $a \in \mathbb{R}$ telle que $f'(a) \neq 0$, alors

$$f(x) - f(a) \underset{a}{\sim} f'(a)(x-a)$$

   (b) En déduire la valeur de la limite $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par

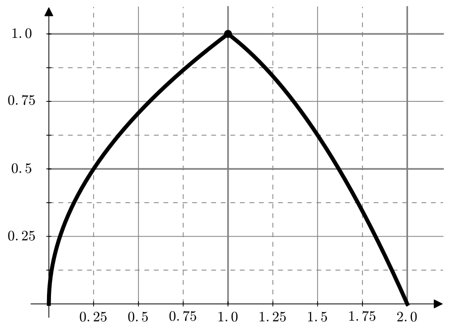
$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \qquad f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si} \quad x \leqslant 1 \\ ax^2 + bx + 1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

   (a) Montrer que la fonction f est continue en 1 si et seulement si $a + b = 0$.

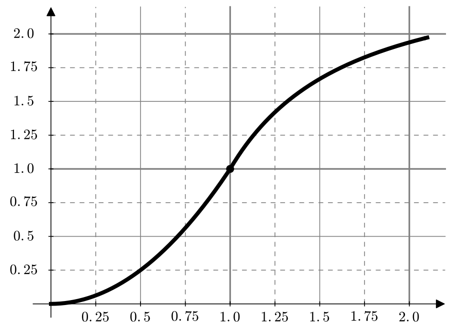
   (b) Montrer que la fonction f est dérivable en 1 si et seulement si $\begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases}$ et donner la valeur de $f'(1)$ dans ce cas.

(c) Parmi les graphes ci-dessous, lequel représente la fonction f associée aux valeurs de a et b données ci-dessus ? Justifier.

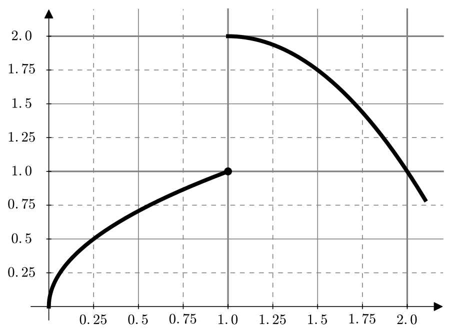
A



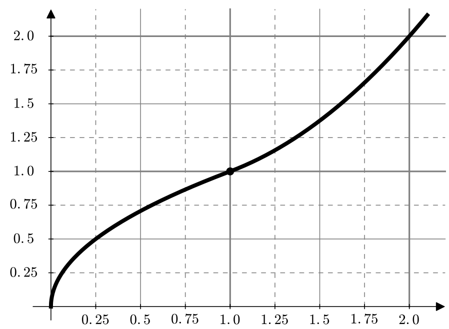
B



C



D



⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 1. *Un exemple*

Soient α un réel non nul et $\varphi \,:\, x \longmapsto xe^{\alpha.x}$

(a) Calculer $\varphi'(x)$ et $\varphi''(x)$.
En déduire une conjecture sur la forme de l'expression $\varphi^{(n)}(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) Démontrer votre conjecture par recurrence.

2. *Cas général*

Soient f et g deux fonctions admettant des dérivées de tous ordres.

(a) Calculer $(f.g)'$ et $(f.g)''$ en fonction de f, g, f', g', f'' et g''.

(b) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad (f.g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}.g^{(n-k)}$$

3. Montrer que la formule générale ci-dessus, appliquée à la fonction φ de la question 1 permet de retrouver la formule conjecturée.

⋆ ⋆
⋆

CORRECTION

Exercice 1 :

1. (a) $\exists M \in \mathbb{R} \;/\; \forall x \in \mathbb{R},\; f(x) < M$
   (b) $\forall M \in \mathbb{R},\; \exists x_0 \in \mathbb{R} \;/\; f(x_0) \geqslant M$

2. $\forall M \in \mathbb{R},\; \exists x_0 \in \mathbb{R} \;/\; \forall x \geqslant x_0,\; f(x) \geqslant M$

3. Supposons que f est croissante et non majorée. D'après la question 1.(b), on a

$$\forall M \in \mathbb{R},\; \exists x_0 \in \mathbb{R} \;/\; f(x_0) \geqslant M$$

Par ailleurs, la fonction f étant croissante, on a

$$\forall x \geqslant x_0,\; f(x) \geqslant f(x_0) \geqslant M$$

On retrouce ici la définition de la limite cherchée.

4. (a) La fonction $x \mapsto 1 - e^{-x}$ est croissante sur $\mathbb{R}$ et tend vers 1 en $+\infty$.
   (b) La fonction $x \mapsto (x\sin(x))^2$ n'est pas majorée et n'admet aucune limite en $+\infty$.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 :

1. (a) Par définition de la dérivabilité, si f est dérivable en a, on a

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

Ainsi, si $f'(a) \neq 0$, on a également

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{f'(a)(x - a)} = 1$$

et par définition de l'équivalence,

$$f(x) - f(a) \sim_a f'(a)(x - a)$$

   (b) En posant $f(x) = \sqrt{x}$ et $a = 1$, la fonction f est dérivable en a et

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} \underset{x\to 1}{\longrightarrow} f'(1) = \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2}$$

2. (a) Par définition, f est continue en 1 si et seulement si

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) = f(1) = \sqrt{1} = 1$$

Or

— la fonction racine étant continue en 1, on a $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) = 1$,

— tout polynôme étant continu sur $\mathbb{R}$, on a $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} ax^2 + bx + 1 = a + b + 1$.

Ainsi, f est continue en 1 si et seulement si

$$a + b + 1 = 1 \iff a + b = 0$$

(b) Pour que f soit dérivable en 1, elle doit avant tout être continue. On doit donc avoir déjà $a + b = 0$.
De plus, les limites

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \quad \text{et} \quad \lim_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

doit exister dans $\mathbb{R}$ et être égales.

D'après la question préliminaire, on a

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{1}{2}$$

De plus, pour $x > 1$, on a

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \frac{ax^2 + bx + 1 - a - b - 1}{x - 1} \\ &= \frac{a(x^2 - 1) + b(x - 1)}{x - 1} \\ &= a(x + 1) + b \\ &\underset{x \to 1}{\longrightarrow} 2a + b \end{aligned}$$

Outre la première condition, il faut donc également que $2a + b = \dfrac{1}{2}$.

Ainsi, la fonction f est dérivable en 1 si et seulement si les coefficients a et b sont solutions du système linéaire

$$\begin{cases} a + b = 0 & (E_1) \\ 2a + b = \frac{1}{2} & (E_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} & (E_2) - (E_1) \\ b = -a = -\frac{1}{2} & (E_1) \end{cases}$$

et dans ce cas, on a $f'(1) = \frac{1}{2}$.

(c) Parmi les graphes proposés, on peut éliminer
— le graphe C qui correspond à une fonction non continue en 1,
— le graphe A qui correspond à une fonction continue, mais non dérivable en 1.
Parmi les deux graphes restants, c'est le graphe D qu'il faut garder car c'est celui respectant la concavité de la fonction racine sur l'intervalle $[0, 1]$.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 :

1. (a) Si $\varphi(x) = xe^{\alpha x}$, on a

   — $\varphi'(x) = e^{\alpha x} + x.\alpha.e^{\alpha x} = (1 + \alpha x)e^{\alpha x}$

   — $\varphi''(x) = \alpha.e^{\alpha x} + (1 + \alpha x).\alpha.e^{\alpha x} = \alpha(2 + \alpha x)e^{\alpha x}$

   D'après les calculs ci-dessus, on peut conjecturer que

$$\varphi^{(n)}(x) = \alpha^{n-1}(n + \alpha x)e^{\alpha x}$$

   (b) Soit

$$\mathcal{P}(n) \ : \ \varphi^{(n)}(x) = \alpha^{n-1}(n + \alpha x)e^{\alpha x}$$

   — D'après les calculs précédents, les fonctions $\mathcal{P}(1)$ et $\mathcal{P}(2)$ sont vraies.
   — Supposons qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors

$$\begin{aligned}\varphi^{(n+1)}(x) &= \left(\varphi^{(n)}\right)'(x) = \alpha^{n-1}\left[\alpha.e^{\alpha x} + (n + \alpha x).\alpha.e^{\alpha x}\right] \\ &= \alpha^n(n + 1 + \alpha x)e^{\alpha x}\end{aligned}$$

   Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie et la propriété $\mathcal{P}(n)$ est héréditaire.

   Par récurrence, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2. (a) D'après les formules usuelles, on a

$$(f.g)'(x) = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$$

   et

$$(f.g)''(x) = (f'.g + f.g')'(x) = f''(x).g(x) + 2f'(x).g'(x) + f(x).g''(x)$$

   (b) Soit

$$\mathcal{P}(n) \ : \ (f.g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}.g^{(n-k)}$$

   — D'après les calculs précédents, la propriété $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

— Supposons qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie. On a alors

$$\begin{aligned}
(f.g)^{(n+1)}(x) &= \left((f.g)^{(n)}\right)'(x) \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}.g^{(n-k)}\right)'(x) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (f^{(k)}.g^{(n-k)})'(x) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (f^{(k+1)}.g^{(n-k)} + f^{(k)}.g^{(n-k+1)})(x) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(k)}.g^{(n-k+1)}(x) + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}.g^{(n-k+1)}(x) \\
&= f^{(n+1)}.g(x) + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right] f^{(k)}.g^{(n-k+1)}(x) + f.g^{(n+1)}(x) \\
&= f^{(n+1)}.g(x) + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} f^{(k)}.g^{(n-k+1)}(x) + f.g^{(n+1)}(x) \quad ^{(*)} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)}.g^{(n-k+1)}(x)
\end{aligned}$$

$^{(*)}$: d'après les formules de calcul des coefficients du binôme.

Ainsi, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est héréditaire. Elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3. En posant $f(x) = x$ et $g(x) = e^{\alpha x}$, on a

$$f^{(0)}(x) = x, \quad f^{(1)}(x) = 1 \quad \text{et} \quad \forall k \geqslant 2, \quad f^{(k)}(x) = 0$$

et

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad g^{(k)}(x) = \alpha^k e^{\alpha x}$$

Ainsi, d'après la formule établie à la question précédente, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\varphi^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x).g^{(n-k)}(x) \\
&= x.\alpha^n e^{\alpha x} + n.\alpha^{n-1} e^{\alpha x} \\
&= \alpha^{n-1}(n + \alpha x)e^{\alpha x}
\end{aligned}$$

On retrouve bien la formule établie à la première question.

⋆ ⋆
⋆