CONTRÔLE CONTINU

Fonctions réelles d'une variable réelle.

Tous les exercices sont indépendants. *Calculatrices autorisées*
Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation.

Exercice 1 Soient m et n deux entiers naturels non nuls fixés. On note

$$f_{m,n} \, : \, x \longmapsto \frac{\sqrt{1+x^m} - \sqrt{1-x^m}}{x^n}$$

1. *Le cas* $m = n = 1$
   (a) Donner l'expression de $f_{1,1}(x)$ en fonction de x.
   (b) Déterminer le domaine de définition de la $f_{1,1}$.
   (c) Montrer que $f_{1,1}$ admet un prolongement continue sur $[-1,1]$. On notera encore $f_{1,1}$ le prolongement en question et on précisera la valeur de $f_{1,1}(0)$.

2. *Cas général*
   (a) Déterminer le domaine de définition de $f_{m,n}$.
   (b) Montrer que $f_{m,n}$ admet un prolongement continue sur l'intervalle $[-1,1]$ si et seulement si $m \geqslant n$. Dans ce cas, on notera encore $f_{m,n}$ le prolongement en question et on précisera, selon les valeurs de m et n, la valeur de $f_{m,n}(0)$.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 Soit f la fonction définie par

$$f \, : \, x \longmapsto \frac{|x|}{1+|x^2-1|}$$

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Montrer que f est continue sur son domaine de définition.
3. Étudier la parité de f.
4. *Etude de f sur* $\mathbb{R}^+$
   (a) Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Donner l'expression de $f(x)$ sans utiliser la valeur absolue.
   (b) Montrer que f est dérivable en tout point $x \in \mathbb{R}^+_*\backslash\{1\}$ et déterminer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+_*\backslash\{1\}$.

(c) Montrer que f n'est pas dérivable en 1.

(d) Montrer que f est dérivable à droite en 0.

5. Tracer une esquisse de la courbe de f sur $\mathbb{R}^+$. On fera en particulier appaître sur le dessin les résultats numériques obtenus aux questions précédentes.
6. En déduire une esquisse de la courbe de f sur $\mathbb{R}$.
7. À l'aide d'un argument géométrique, discuter de la dérivabilité de f en 0.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 *Limites et fonctions périodiques*

L'objectif de cet exercice est de montrer, à l'aide d'un raisonnement par l'absurde, que la fonction sinus d'admet pas de limite en $+\infty$.

1. *Résultats théoriques*

   Soient f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

   (a) Donner la définition de
   $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$$

   (b) Montrer que si f admet une constante $T > 0$ pour période, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f admet également nT pour période.

2. Supposons donc que la fonction sinus admet une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

   (a) Montrer que $\ell \in \mathbb{R}$ (i.e. $\ell \neq \pm\infty$).

   (b) Soit $\ell \in [-1, 1]$. Montrer que pour tout $B > 0$, il existe $x > B$ tel que $|\sin(x) - \ell| > \frac{1}{2}$. On pourra distinguer les cas $\ell \leqslant 0$ et $\ell > 0$.

   (c) Conclure.

⋆ ⋆
⋆

CORRECTION

Fonctions réelles d'une variable réelle 2019/2020

Exercice 1 :

1. (a) $f_{1,1}(x) = \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$

   (b) La quantité $f_{1,1}(x)$ existe si et seulement si

   $$(x \neq 0 \text{ et } 1+x \geqslant 0 \text{ et } 1-x \geqslant 0) \iff (x \neq 0 \text{ et } -1 \leqslant x \leqslant 1)$$

   D'où $D_{f_{1,1}} = [-1, 0[\cup]0, 1] = [-1, 1]\backslash\{0\}$.

   (c) La fonction $f_{1,1}$ est continue sur son domaine de définition car construite à partir de fonctions continues. Elle admet donc un prolongement continue sur $[-1, 1]$ si elle admet une limite finie en 0. Or pour tout $x \in D_{f_{1,1}}$, on a

   $$\begin{aligned} f_{1,1}(x) &= \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} \times \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} \\ &= \frac{(\cancel{1}+x) - (\cancel{1}-x)}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} \\ &= \frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} \\ &= \frac{2}{(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} \\ &\underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1 \end{aligned}$$

   Ainsi, en posant $f_{1,1}(0) = 1$, on obtient une fonction continue sur $[-1, 1]$.

2. Soit $(m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$ fixé.

   (a) La quantité $f_{m,n}(x)$ existe si et seulement si

   $$x^n \neq 0 \text{ et } 1 + x^m \geqslant 0 \text{ et } 1 - x^m \geqslant 0$$

   La première condition impose donc $x \neq 0$.

   Pour satisfaire les deux autres conditions, on doit distinguer les cas selon la parité de m. Ainsi,

   — Si m est pair, on a $1 + x^m \geqslant 0$ pour tout x et

   $$1 - x^m \geqslant 0 \iff x^m \leqslant 1 \iff \boxed{-1 \leqslant x \leqslant 1}$$

   — Si m est impair, on a

   $$1 + x^m \geqslant 0 \iff x^m \geqslant -1 \iff \boxed{x \geqslant -1}$$

   et

   $$1 - x^m \geqslant 0 \iff x^m \leqslant 1 \iff \boxed{x \leqslant 1}$$

Ainsi, dans tous les cas, on a $D_{f_{m,n}} = [-1,1]\backslash\{0\}$.

(b) Comme à la question précédente, la fonction $f_{m,n}$ admet un prolongement continue sur $[-1,1]$ si et seulement si elle admet une limite finie en 0. Or pour tout $x \in D_{f_{m,n}}$, on a

$$\begin{aligned} f_{m,n}(x) &= \frac{\sqrt{1+x^m}-\sqrt{1-x^m}}{x^n} \times \frac{\sqrt{1+x^m}+\sqrt{1-x^m}}{\sqrt{1+x^m}+\sqrt{1-x^m}} \\ &= \frac{(\cancel{1}+x^m)-(\cancel{1}-x^m)}{x^n(\sqrt{1+x^m}+\sqrt{1-x^m})} \\ &= \frac{2x^m}{x^n(\sqrt{1+x^m}+\sqrt{1-x^m})} \\ &= \frac{2x^{m-n}}{(\sqrt{1+x^m}+\sqrt{1-x^m})} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$f_{m,n}(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 & \text{si} \quad m > n \\ 1 & \text{si} \quad m = n \\ \pm\infty & \text{si} \quad m < n \end{cases}$$

La fonction $f_{m,n}$ admet donc un prolongement continu en 0 si et seulement si $m \geqslant n$ et ce prolongement est donné par

$$\boxed{f_{m,n}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad m > n \\ 1 & \text{si} \quad m = n \end{cases}}$$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 :

1. La quantité $f(x)$ existe si et seulement si $1+|x^2-1| > 0$. On puisque $|x^2-1| \geqslant 0$, on a

$$1+|x^2-1| \geqslant 1 > 0$$

Donc $D_f = \mathbb{R}$.

2. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ car construite à partir de fonctions continues sur leurs domaines de définitions respectifs.

3. Le domaine de définition de f est centré en 0. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f(-x) = \frac{|-x|}{1+|(-x)^2-1|} = \frac{|x|}{1+|x^2-1|} = f(x)$$

Donc f est paire.

4. (a) Soit $x \geqslant 0$. Pour obtenir une expression de $f(x)$ sans les valeurs absolues, on doit distinguer les cas. Or x étant positif, on a $|x| = x$ et

$$x^2 - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x^2 \geqslant 1 \Leftrightarrow x \geqslant 1$$

Ainsi,

— Si $x \geqslant 1$, on a $|x^2 - 1| = x^2 - 1$ et

$$f(x) = \frac{x}{\cancel{1} + x^2 - \cancel{1}} = \frac{\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}} = \frac{1}{x}$$

— Si $0 \leqslant x < 1$, on a $|x^2 - 1| = 1 - x^2$ et

$$f(x) = \frac{x}{1 + 1 - x^2} = \frac{x}{2 - x^2}$$

En résumé, pour tout $x \geqslant 0$, on a

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2 - x^2} & \text{si} \quad 0 \leqslant x < 1 \\ \\ \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x \geqslant 1 \end{cases}$$

(b) Soit $x \in (\mathbb{R}_*^+)\backslash\{1\}$.

— Si $0 < x < 1$, on a $f(x) = \dfrac{x}{2 - x^2}$. La fonction f est alors dérivable en x comme quotient de fonctions dérivables et

$$f'(x) = \frac{1.(2 - x^2) - x.(-2x)}{(2 - x^2)^2} = \frac{x^2 + 2}{(x^2 - 2)^2}$$

— Si $x > 1$, on a $f(x) = \dfrac{1}{x}$. La fonction inverse étant dérivable sur son domaine de définition, la fonction f est alors dérivable en x et

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

(c) Pour étudier la dérivabilité de f en 1, on doit revenir à la définition basée sur le taux d'accroissement $\dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$. Or

— Si $0 < x < 1$, on a

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{\frac{x}{2 - x^2} - 1}{x - 1} = \frac{x - (2 - x^2)}{(x - 1)(2 - x^2)}$$
$$= \frac{x^2 + x - 2}{(x - 1)(2 - x^2)}$$

En notant alors que $x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$, on a

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{\cancel{(x - 1)}(x + 2)}{\cancel{(x - 1)}(2 - x^2)} = \frac{x + 2}{2 - x^2}$$
$$\underset{x \overset{<}{\to} 1}{\longrightarrow} \frac{1 + 2}{2 - 1^2} = 3$$

— Si $x > 1$, on a

$$\begin{aligned}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \frac{\frac{1}{x}-1}{x-1} = \frac{1-x}{x(x-1)} \\ &= -\frac{\cancel{x-1}}{x\cancel{(x-1)}} = -\frac{1}{x} \\ &\underset{x \overset{>}{\to} 1}{\longrightarrow} -1\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \neq \lim_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

Donc la limite $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ n'existe pas et la fonction f n'est pas dérivable en 1.

(d) La fonction f est dérivable à droite en 0 si et seulement si la limite

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x}$$

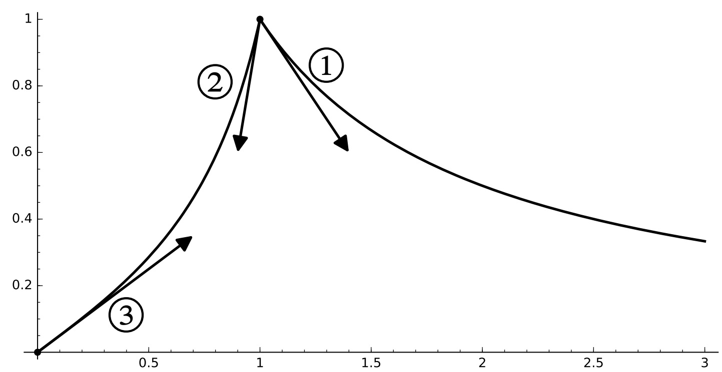
existe dans $\mathbb{R}$.

Or, soit $x > 0$. Puisque l'on souhaite passer à la limite $x \to 0$, on peut supposer que $x < 1$. On a alors $f(x) = \frac{x}{2-x^2}$ et

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(2-x^2)} = \frac{1}{2-x^2} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$$

Ainsi, la fonction f est bien dérivable à droite en 0.

5.



① Lors de l'étude de la dérivabilité de f en 1, on a calculé

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = -1$$

D'un point de vue géométrique, cela se traduit par l'existence d'une demi-tangente de pente -1 à droite au point $(1, f(1))$.

(2) Lors de l'étude de la dérivabilité de f en 1, on a calculé

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = 3$$

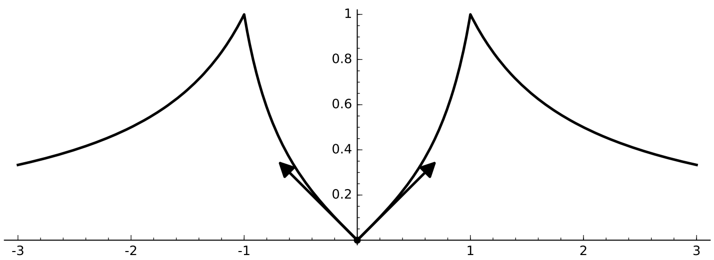
D'un point de vue géométrique, cela se traduit par l'existence d'une demi-tangente de pente 3 à gauche au point $(1, f(1))$.

(3) Lors de l'étude de la dérivabilité de f en 0, on a calculé

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{1}{2}$$

D'un point de vue géométrique, cela se traduit par l'existence d'une demi-tangente de pente $\frac{1}{2}$ au point $(0, f(0))$.

6. La fonction f étant paire, sa courbe est symétrique par rapport à l'axe (Oy). D'où :



7. Par symétrie, si la courbe de f admet, en 0, une demi-tangente de pente $\frac{1}{2}$ à droite, elle admet alors une demi-tangente de pente $-\frac{1}{2}$ à gauche. La courbe de f présente donc un "angle" en 0. La fonction f n'est donc pas dérivable en 0.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 :

1. (a) Par définition,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \iff \forall\varepsilon > 0,\ \exists B \in \mathbb{R} \ /\ x \geqslant B \ \Rightarrow\ |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

(b) On raisonne ici par récurrence. Ainsi, posons

$$\mathcal{P}(n) \ :\ \text{“}nT \text{ est une période de } f\text{”}$$

— Par hypothèse, $T = 1.T$ est une période de f. Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie, i.e.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x+T) = f(x)$$

— Supposons qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x+nT) = f(x)$$

Mais alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x+(n+1)T) = f((x+nT)+T) = f(x+nT)$$

car T est une période de f. D'après l'hypothèse de récurrence, on a donc

$$f(x+(n+1)T) = f(x+nT) = f(x)$$

et $(n+1)T$ est également une période de f. Autrement dit, la propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Ainsi, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour $n = 1$ et héréditaire. Elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2. (a) Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$, si $\lim\limits_{x \to +\infty} \sin(x) = \ell$, alors $-1 \leqslant \ell \leqslant 1$. En particulier, $\ell \neq \pm\infty$.

(b) Soit $\ell \in [-1, 1]$.

— Si $\ell \geqslant 0$, on a $|-1-\ell| > \frac{1}{2}$.

Par ailleurs, la fonction sinus étant 2π-périodique, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\sin(-\frac{\pi}{2} + 2n\pi) = \sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$.

Soit alors $B > 0$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi > B$. Mais alors $|\sin(x) - \ell| = |-1-\ell| > \frac{1}{2}$.

— Si $\ell < 0$, on a alors $|1-\ell| > \frac{1}{2}$. Mais alors, puisque $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\sin(\frac{\pi}{2} + 2n\pi) = 1$.
Soit alors $B > 0$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi > B$. Mais alors $|\sin(x) - \ell| = |1-\ell| > \frac{1}{2}$.

(c) À la question précédente, on a montrer que pour tout réel $\ell \in [-1, 1]$,

$$\forall B > 0,\ \exists x > B \ / \ |\sin(x) - \ell| > \frac{1}{2}$$

Ceci contredit l'hypothèse de départ $\lim\limits_{x \to +\infty} \sin(x) = \ell$. Cette hypothèse est donc fausse et la fonction sinus n'admet pas de limite en $+\infty$.

⋆ ⋆
⋆