CONTRÔLE CONTINU

Séries de Fourier, transformée de Laplace

Durée : 1h30. *Calculatrices et formulaires autorisés.*

Tous les exercices sont indépendants
Il sera tenu compte de la rédaction et la présentation

Exercice 1 Soit f la fonction 2π-périodique définie par

$$\forall t \in [-\pi, \pi[, \quad f(t) = t$$

1. Tracer la courbe de f entre -4π et 4π.
2. Calculer les coefficients de Fourier réels de f.
3. Tracer le spectre de f.
4. En posant $t = \frac{\pi}{2}$, montrer que

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} = \frac{\pi}{4}.$$

5. On rappelle que l'égalité de Parseval dit que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)^2 dt = \frac{a_0^2}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}.$$

Déduire de cette formule la valeur de la somme

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 On considère un système Entrée/Sortie dont l'action sur le signal d'entrée $e(t)$ est donnée via les transformées de Laplace. Précisément, si l'on note $E(p)$ la transformée du signal d'entrée, le transformée de Laplace du signal de sortie $s(t)$ est données par

$$S(p) = \frac{E(p)}{p^2+1}$$

On souhaite étudier la réponse du système au signal d'entrée défini sur $[0,+\infty[$ par

$$e(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \leqslant t < \pi \\ 0 & \text{si} \quad t \geqslant \pi \end{cases}$$

1. Tracer le graphe de e.
2. Exprimer e à l'aide de la fonction échelon et calculer la transformée de Laplace $E(p)$ de e.
3. En déduire la transformée de Laplace $S(p)$ du signal de sortie.
4. En déduire le signal $s(t)$ sous forme explicite.
5. Ajouter le graphe de s à celui de e.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 On considère une poutre de masse propre nulle, de longueur $2L$, encastrée à son origine et libre à l'autre extrémité.

En son milieu on dispose une charge ponctuelle de valeur F. E et I sont classiquement le module de Young et le moment d'inertie.

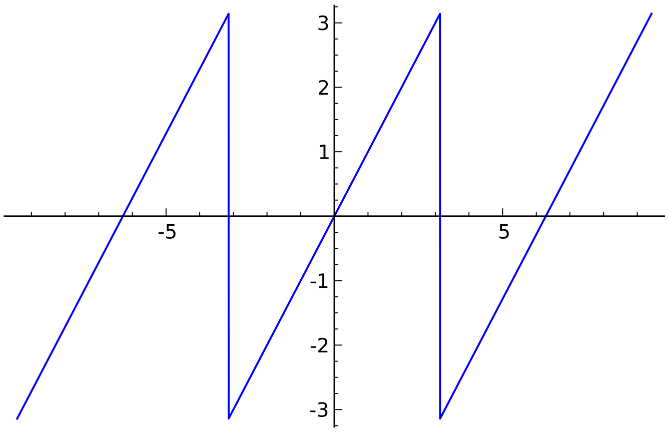
1. Écrire la ou les équations différentielles avec les conditions initiales donnant la déformée $\omega(x)$ en fonction de x, E, I et le moment fléchissant $M(x)$.
2. Exprimer le moment fléchissant $M(x)$ à l'aide de la fonction échelon U.
3. Résoudre cette équation par la méthode de Laplace.
4. Montrer que la flèche du point milieu et de l'extrémité libre sont proportionnelles et donner ce facteur de proportionnalité.

⋆ ⋆
⋆

CORRECTION

Exercice 1

1.



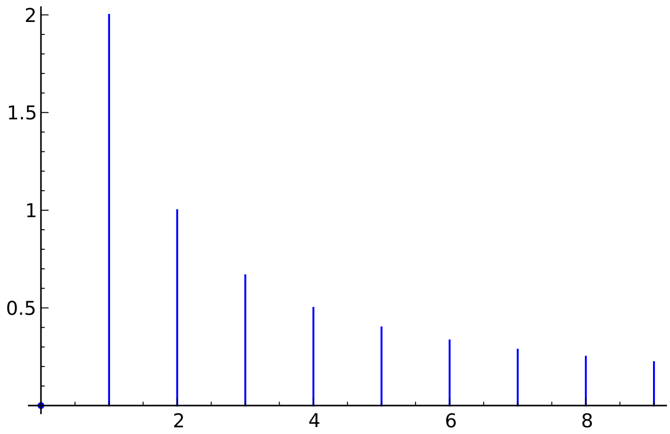
2. D'après le graphe ci-dessus, la la fonction f est impaire. Donc $a_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   Reste à calculer les $b_n(f)$, $n \geqslant 1$:

$$\begin{aligned}
b_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)\,dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\sin(nt)\,dt && \text{par périodicité} \\
&= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{t\cos(nt)}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nt)\,dt && \text{par parties} \\
b_n(f) &= -\frac{2\,(-1)^n}{n}
\end{aligned}$$

   La série de Fourier de f est donc

$$S_f(t) = -2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin(nt).$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = |b_n|$. D'où



4. La fonction f étant continue en $t = \frac{\pi}{2}$, on a $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = S_f\left(\frac{\pi}{2}\right)$. D'où

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} &= -2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) \\ \iff \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) &= -\frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

   Or

$$\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2p \\ (-1)^p & \text{si } n = 2p+1 \end{cases}$$

   Donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{2p+1}}{2p+1}(-1)^p = -\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1}$$

   et

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} = \frac{\pi}{4}$$

5. En appliquant l'égalité de Parseval à la fonction f, on obtient :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

   puis

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

   ATTENTION : avant d'effectuer le calcul intégral, il faut prendre soin de déplacer l'intervalle d'intégration de $[0, 2\pi]$ à $[-\pi, \pi]$ (pourquoi ?).

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2

1.
2. $e(t) = U(t) - U(t-\pi)$. D'où

$$E(p) = \mathcal{L}(U)(p) - e^{-\pi p}\mathcal{L}(U)(p) = \frac{1}{p} - \frac{e^{-\pi p}}{p}$$

3. $S(p) = \dfrac{E(p)}{p^2+1} = \dfrac{1}{p(p^2+1)} - \dfrac{e^{-\pi p}}{p(p^2+1)}$.

4. Pour calculer $s(t)$, il faut commencer par développer la fraction $\frac{1}{p(p^2+1)}$. La théorie nous dit que

$$\frac{1}{p(p^2+1)} = \frac{a}{p} + \frac{bp+c}{p^2+1}$$

Par identification, on obtient $a = 1$, $c = 0$ et $b = -1$. D'où

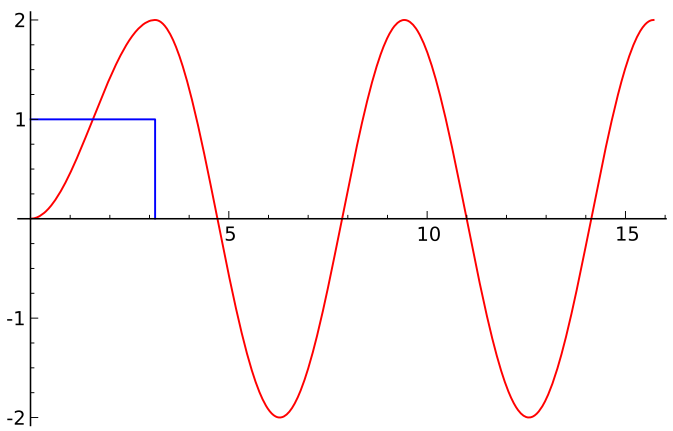
$$\frac{1}{p(p^2+1)} = \frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+1}$$

Et

$$S(p) = \frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+1} - \frac{e^{-\pi p}}{p} + \frac{p}{p^2+1}e^{-\pi p}$$

À l'aide du tableau des transformées, on trouve

$$\begin{aligned} s(t) &= U(t) - \cos(t).U(t) - U(t-\pi) + \cos(t-\pi).U(t-\pi) \\ &= \begin{cases} 1-\cos(t) & \text{si} \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi \\ -2\cos(t) & \text{si} \quad t \geqslant \pi \end{cases} \end{aligned}$$



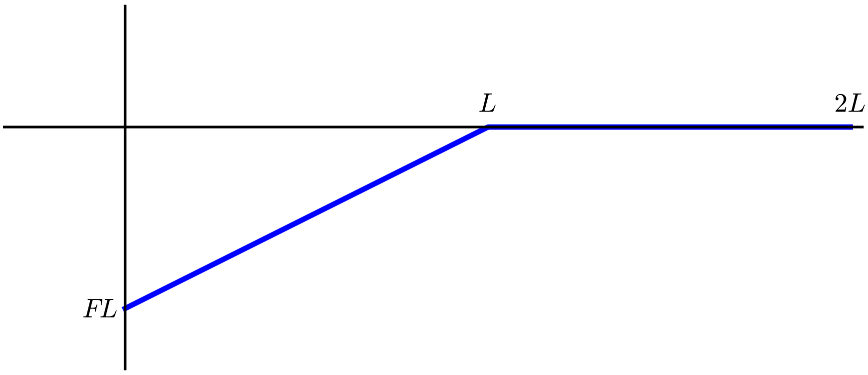
⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3

1. La théorie mécanique nous donne

$$\omega''(x) = \frac{M(x)}{EI}, \qquad \omega(0) = \omega'(0) = 0$$

2. Le bilan des contraintes imposées à la poutre donne pour $M(x)$ le graphe suivant :



D'où

$$M(x) = (Fx - FL)(U(x) - U(x - L))$$

3. L'équation différentielle s'écrit donc

$$\omega'' = \frac{1}{EI}\left(FxU(x) - FL.U(x) - F(x - L)U(x - L)\right)$$

sous les conditions initiales $\omega(0) = \omega'(0) = 0$.

En passant à la transformée de Laplace, on trouve

$$p^2W(p) = \frac{1}{EI}\left(\frac{F}{p^2} - \frac{FL}{p} - \frac{Fe^{-Lp}}{p^2}\right)$$

D'où

$$W(p) = \frac{F}{EI}\left(\frac{1}{p^4} - \frac{L}{p^3} - \frac{e^{-Lp}}{p^4}\right)$$

En remontant, on obtient

$$\omega(x) = \frac{F}{EI}\left(\frac{x^3}{6}U(x) - \frac{Lx^2}{2}U(x) - \frac{(x - L)^3}{6}U(x - L)\right)$$

4. D'après l'expression précédente, on a

$$\omega(L) = -\frac{FL^3}{3EI} \qquad \text{et} \qquad \omega(2L) = -\frac{5FL^3}{6EI}$$

D'où $\omega(2L) = \frac{5}{2}\omega(L)$.