CONTRÔLE CONTINU

Séries de Fourier, transformée de Laplace

Durée : 1h30. *Calculatrices et formulaires autorisés.*

Tous les exercices sont indépendants
Il sera tenu compte de la rédaction et la présentation

Exercice 1 1. *Développement en série de Fourier*

Soit f la fonction 2π-périodique et impaire vérifiant :

$$\forall t \in]0,\pi], \quad f(t) = \frac{\pi - t}{2}.$$

(a) Tracer le graphe de f sur $[-3\pi, 3\pi]$.

(b) Calculer les coefficients de Fourier réels de f.

(c) Calculer les amplitudes A_n et tracer le spectre de f.

(d) Calculer les sommes $S_1 = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n}$ et $S_2 = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1}$.

(e) Calculer la somme $\zeta(2) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

2. *Équation différentielle*

On considère maintenant l'équation différentielle

$$(E) \; : \; y'' + 2y = f(t)$$

où f est la fonction définie à la question 1 et on suppose que cette équation admet une solution particulière y_p impaire, 2π-périodique et développable en série de Fourier :

$$y_p(t) = \sum_{n \geqslant 1} \beta_n \sin(nt). \qquad (*)$$

(a) En dérivant l'expression $(*)$ terme à terme, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \beta_n = \frac{1}{n(2-n^2)}.$$

(b) On rappelle que l'énergie du signal représenté par y_p est

$$E_{\text{tot}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} y_p(t)^2 dt.$$

i. Exprimer cette énergie sous la forme d'une somme infinie S_E.

ii. En admettant que l'on connaisse la valeur exacte de cette somme S_E, écrire une boucle permettant de déterminer l'entier n_0 auquel tronquer la série de Fourier de y_p de façon à conserver 99% de l'énergie totale.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 1. *Calcul préliminaire*

L'objectif de cette question est de déterminer la transformé de Laplace inverse $g(t)$ de

$$G(p) = \frac{1}{p^2+2p+2}.$$

(a) Déterminer les racines complexes r et $\overline{r}$ du polynôme p^2+2p+2.

(b) Déterminer le nombre $a \in \mathbb{C}$ tel que

$$G(p) = \frac{a}{p-r} + \frac{\overline{a}}{p-\overline{r}}$$

(c) En déduire $g(t) = \mathcal{L}^{-1}(G)(t)$ sous la forme d'une somme d'exponentielles complexes.

(d) À l'aide des formules d'Euler, exprimer $g(t)$ à l'aide de fonctions réelles.

2. On considère le problème différentiel ci-dessous :

$$(S)\ :\ \begin{cases} \frac{1}{2}y'' + y' + y = f(t) \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

où $f\ :\ t \mapsto (t+1).H(t)$, H étant la fonction échelon.

(a) Déterminer la transformée de Laplace de la fonction f.

(b) En calculant la transformée de Laplace du système (S) et en notant Y la transformée de Laplace de y, montrer que

$$Y(p) = \frac{2+2p}{p^2(p^2+2p+2)}.$$

(c) Montrer que pour tout $p \neq 0$, on a

$$Y(p) = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2+2p+2}$$

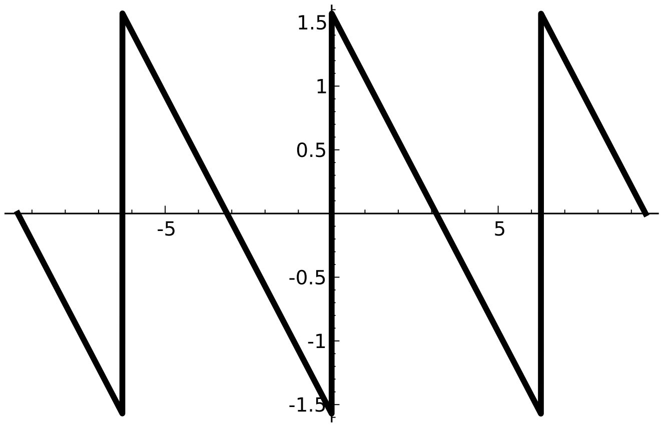
(d) En déduire la solution y de (S).

⋆ ⋆
⋆

CORRECTION

Exercice 1 :

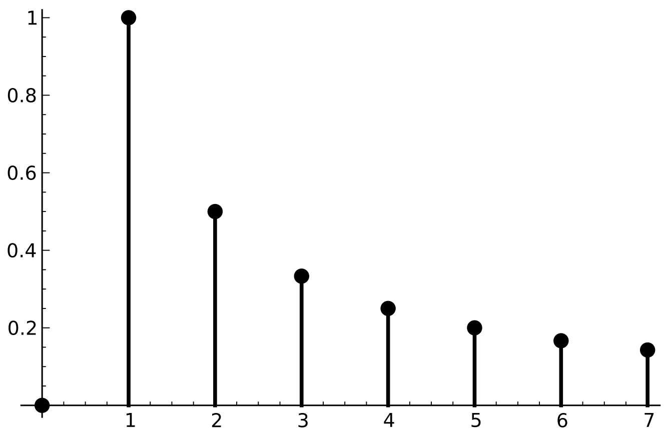
1. (a)



(b) Puisque la fonction f est impaire, on a $a_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour le calcul des $b_n(f)$, on peut se ramener à la demi-période $[0, \pi]$:

$$\begin{aligned}
b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)dt \;&=\; \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\pi - t}{2}\sin(nt)dt \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\left[-\frac{\pi - t}{2n}\cos(nt)\right]_0^{\pi} - \frac{1}{2n}\int_0^{\pi}\cos(nt)dt\right) \\
&= \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = |b_n| = \frac{1}{n}$. D'où



(d) D'après les calculs précédents, la série de Fourier de f est

$$S_f(t) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{\sin(nt)}{n}.$$

Autrement dit, $S_1 = S_f(1)$. Or, la fonction f étant continue en 1, on a $S_f(1) = f(1)$ et $S_1 = \dfrac{\pi - 1}{2}$.
Pour le calcul de S_2, il faut "éliminer" dans $S_f(t)$ les termes de rang pair. C'est le cas en posant $t = \frac{\pi}{2}$. En séparant les indices pairs des indices impairs dans la somme $S_f(\frac{\pi}{2})$, on obtient la somme S_2 cherchée :

$$S_2 = S_f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

(e) La somme $\zeta(2)$ s'obtient en appliquant le théorème de Parseval à la fonction f :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)^2 dt = \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{2n^2} = \frac{1}{2}\zeta(2)$$

Le calcul intégral donne

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)^2 dt &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{(\pi - t)^2}{4} dt \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi} (\pi^2 - 2\pi t + t^2) dt \\
&= \frac{1}{4\pi}\left[\pi^2 t - \pi t^2 + \frac{t^3}{3}\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{\pi^2}{12}
\end{aligned}$$

La formule de Parseval permet alors de retrouver la valeur $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$

2. (a) Si $y_p(t) = \sum_{n \geqslant 1} \beta_n \sin(nt)$, en dérivant deux fois terme à terme, on obtient

$$y_p''(t) = -\sum_{n \geqslant 1} n^2 \beta_n \sin(nt).$$

En injectant ces formes dans l'équation et en remplaçant f par sa série de Fourier, on obtient

$$\sum_{n \geqslant 1} (2 - n^2)\beta_n \sin(nt) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n} \sin(nt).$$

Par identification, on obtient alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \beta_n = \frac{1}{n(2 - n^2)}.$$

(b) i. On reconnaît dans l'expression E_{tot} le membre de gauche de l'égalité de Parseval. On en déduit :

$$E_{\text{tot}} = \frac{\alpha_0^2}{4} + \sum_{n\geqslant 1} \frac{\alpha_n^2 + \beta_n^2}{2} = \frac{1}{2} \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2(2-n^2)^2} = S_E$$

ii. Si l'on connaît S_E et qu'on la stocke dans une variable $\texttt{S}_\texttt{E}$, la boucle suivante permet de récupérer la majeure partie du signal (en termes d'énergie) :

```
Taux=0.99
N=0
S=0
while S<Taux*S_E:
   N=N+1
   S=S+1/(N**2*(2-N**2)**2)
N
```

La somme $S_N(t) = \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin(nt)}{n(2-n^2)}$ est alors une approximation de y_p contenant 99% de l'énergie de y_p.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 :

1. (a) Les racines de $p^2 + 2p + 2$ sont r et $\overline{r}$ où $r = -1 + i$.

   (b) La théorie assure l'existence de nombres complexes a et b tels que

$$G(p) = \frac{a}{p+1-i} + \frac{b}{p+1+i}.$$

   Quelque soit la méthode employée, on obtient $a = \frac{1}{2i}$ et $b = -\frac{1}{2i} = \overline{a}$.

   (c) Puisque $G(p) = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p+1-i} - \frac{1}{p+1+i}\right)$, on tire du tableau des transformées :

$$g(t) = \frac{1}{2i}(e^{(-1+i)t} - e^{(-1-i)t}).H(t)$$

   (d) D'après la formule précédente, on a

$$g(t) = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it}).e^{-t}.H(t) = \sin(t).e^{-t}.H(t)$$

2. (a) En développant $f(t) = t.H(t) + H(t)$, on peut exploiter la linéarité de la TL :

$$F(p) = \mathcal{L}(t.H(t))(p) + \mathcal{L}(H)(p) = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p}.$$

(b) La transformée de Laplace de l'équation différentielle de (S) est

$$\begin{array}{rcl} & \mathcal{L}\left(\frac{1}{2}y'' + y' + y\right)(p) & = \mathcal{L}(f)(p) \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}(y'') + 2\mathcal{L}(y') + 2\mathcal{L}(y)\right) & = F(p) \\ \Leftrightarrow & p^2Y(p) - py(0) - y'(0) + 2pY(p) - 2y(0) + 2Y(p) & = \frac{2}{p^2} + \frac{2}{p} \\ \Leftrightarrow & Y(p)(p^2 + 2p + 2) & = \frac{2+2p}{p^2} \end{array}$$

On en tire

$$Y(p) = \frac{2+2p}{p^2(p^2+2p+2)}$$

(c) En déduisant la somme $\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2+2p+2}$ au même dénominateur, on obtient bien

$$\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2+2p+2} = \frac{p^2+2p+2-p^2}{p^2(p^2+2p+2)} = Y(p).$$

(d) D'après le résultat établi à la question 1, on obtient

$$y(t) = (t - \sin(t)e^{-t}).H(t).$$

⋆ ⋆
⋆