CONTRÔLE CONTINU

Séries de Fourier, transformée de Laplace

Durée : 1h30. *Calculatrices et formulaires autorisés.*

Tous les exercices sont indépendants
Il sera tenu compte de la rédaction et la présentation

Exercice 1 Soit $a \in]0, \pi[$. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, paire, 2π-périodique et qui coïncide sur $[0, \pi[$ avec la fonction qui vaut

$$\begin{cases} 0 \text{ si } 0 \leqslant x \leqslant a \\ 1 \text{ sinon.} \end{cases}$$

1. Représenter graphiquement la fonction f.
2. Calculer ses coefficients de Fourier.
3. Écrire la série de Fourier de f et en déduire l'égalité

$$\frac{\pi - 2a}{4} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(na)\cos(na)}{n} \quad \text{pour tout } a \in]0, \pi[.$$

4. En posant $a = \frac{\pi}{4}$, écrire π sous la forme d'une somme infinie dont tous les termes sont non nuls. On rappelle la formule

$$\sin(\theta)\cos(\theta) = \frac{1}{2}\sin(2\theta)$$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 soit $\alpha \in \mathbb{R}$ un réel non entier entier et soit f la fonction 2π-périodique vérifiant

$$\forall t \in [-\pi, \pi], \quad f(t) = \cos(\alpha t).$$

1. Tracer le graphe de f sur $[-2\pi, 2\pi]$ pour $\alpha = \frac{1}{4}$, $\alpha = \frac{1}{2}$, $\alpha = \frac{3}{4}$.

2. Montrer que la série de Fourier de f est

$$S_f(t) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi} + \frac{2\alpha\sin(\alpha\pi)}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2}\cos(nt)$$

3. En déduire $f(t)$ sous la forme d'une série trigonométrique. (On justifiera que cette égalité est valable pour tout $t \in \mathbb{R}$).
4. En fixant à chaque fois une valeur de t, donner les valeurs des sommes

$$S_1 = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2 - \alpha^2} \qquad \text{et} \qquad S_2 = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2 - \alpha^2}$$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 Soit (S) le système différentiel défini sur $\mathbb{R}^+$ par

$$(S)\ :\ \begin{cases} x' = y + \sin t \\ y' = -x + 2y - \cos t \end{cases}$$

auquel on ajoute les conditions initiales

$$(C.I.)\ :\ x(0) = 0, \qquad y(0) = 1$$

1. Montrer que si l'on note X et Y les transformées de Laplace respectives de x et y, on a

$$(S) + (C.I.) \iff \begin{cases} X = \dfrac{1}{p-1} - \dfrac{p}{p^2+1} \\ Y = \dfrac{1}{p-1} \end{cases}$$

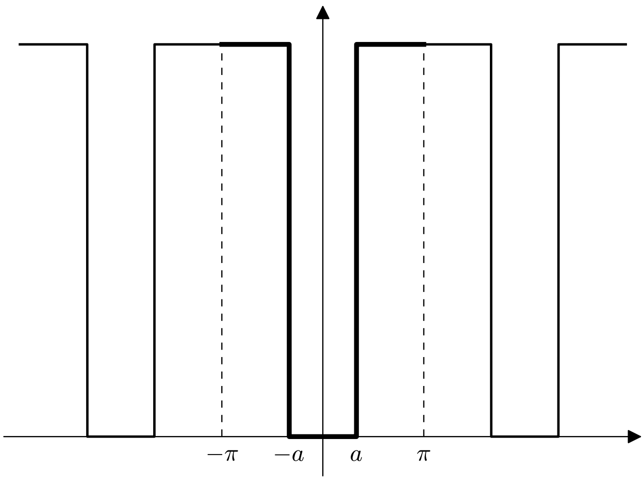
2. En déduire l'unique solution du système $(S) + (C.I.)$.

⋆ ⋆
⋆

CORRECTION

Exercice 1 :

1.



2. La fonction f étant paire, on a $b_n = 0$ pour tout $n \geqslant 1$. D'autre part

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\cos(nt)dt \;=\; \frac{2}{\pi}\int_a^\pi \cos(nt)dt \\ &= \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{n}\sin(nt)\right]_a^\pi \qquad \text{pour } n \neq 0 \\ &= -\frac{2\sin(na)}{n\pi} \end{aligned}$$

et

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_a^\pi dt = \frac{2(\pi - a)}{\pi} = 2\left(1 - \frac{a}{\pi}\right)$$

3. D'après les calculs précédents, on a

$$S_f(t) = 1 - \frac{a}{\pi} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(na)}{n}\cos(nt)$$

4. En $t = a$, on a donc

$$1 - \frac{a}{\pi} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(na)\cos(na)}{n} = \frac{f(a^+) + f(a^-)}{2} = \frac{1}{2}$$

D'où

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(na)\cos(na)}{n} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{a}{\pi}\right) = \frac{\pi - 2a}{4}$$

5. Pour $a = \frac{\pi}{4}$, on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right)}{n} = \frac{\pi - \frac{\pi}{2}}{4} \iff \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

Dans la somme ci-dessus, les termes d'indice pairs sont nuls. On a donc

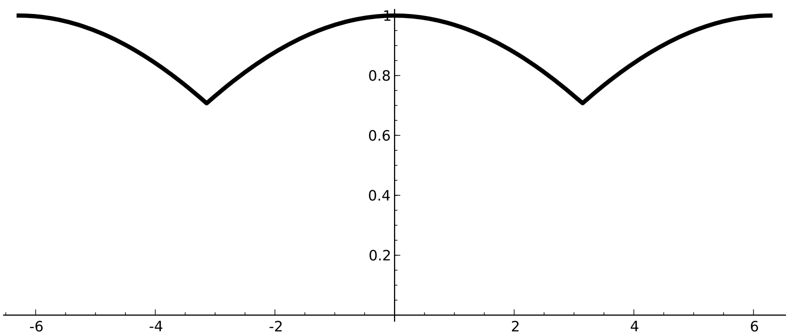
$$\pi = 4\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1}$$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

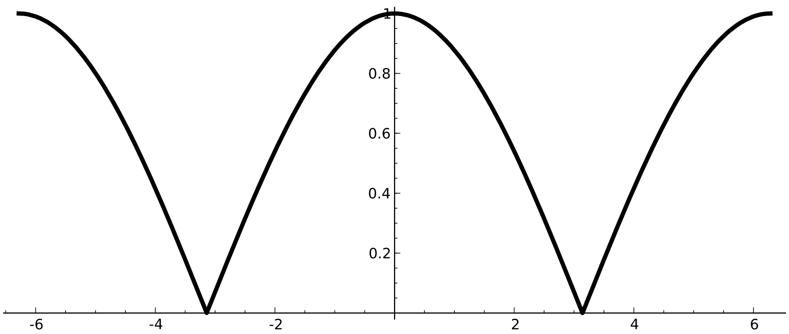
Exercice 2 :

1.

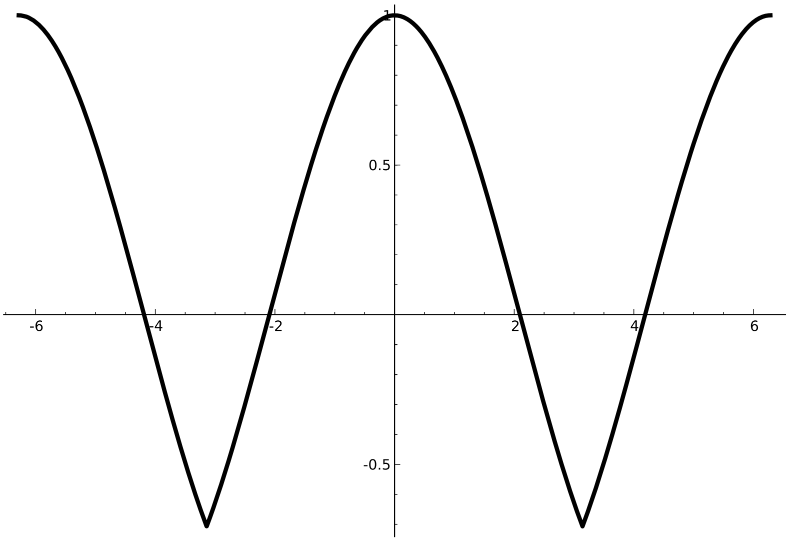
$\alpha = \frac{1}{4}$



$\alpha = \frac{1}{4}$



$\alpha = \frac{1}{4}$



2. La fonction f étant paire, on a $b_n = 0$ pour tout $n \geqslant 1$. Par ailleurs,

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(\alpha t) \cos(nt) dt$$

On peut alors calculer ces coefficients en effectuant successivement deux intégrations par parties. Ainsi,

(a) On pose $\left\{ \begin{array}{rcr} u(t) = \cos(\alpha t) & \Rightarrow & u'(t) = -\alpha \sin(\alpha t) \\ v'(t) = \cos(nt) & \Rightarrow & v(t) = \frac{1}{n} \sin(nt) \end{array} \right.$

On a alors

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \left(\left[\frac{1}{n} \cos(\alpha t) \sin(nt) \right]_0^{\pi} + \frac{\alpha}{n} \int_0^{\pi} \sin(\alpha t) \sin(nt) dt \right) \\ &= \frac{2\alpha}{n\pi} \int_0^{\pi} \sin(\alpha t) \sin(nt) dt \end{aligned}$$

(b) On pose ensuite $\left\{ \begin{array}{rcr} u(t) = \sin(\alpha t) & \Rightarrow & u'(t) = \alpha \cos(\alpha t) \\ v'(t) = \sin(nt) & \Rightarrow & v(t) = -\frac{1}{n} \cos(nt) \end{array} \right.$ et on a

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2\alpha}{n\pi} \left(\left[-\frac{1}{n} \sin(\alpha t) \cos(nt) \right]_0^{\pi} + \frac{\alpha}{n} \int_0^{\pi} \cos(\alpha t) \cos(nt) dt \right) \\ &= -\frac{2\alpha}{\pi n^2} \sin(\alpha\pi)(-1)^n + \frac{\alpha^2}{n^2} a_n \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\left(\frac{\alpha^2}{n^2} - 1 \right) a_n = \frac{2\alpha}{\pi n^2} (-1)^n \sin(\alpha\pi) \implies a_n = \frac{2\alpha(-1)^n}{\pi(\alpha^2 - n^2)} \sin(\alpha\pi)$$

Enfin, le calcul étant valable uniquement pour $n \neq 0$, il faut calculer a_0 à part. Ainsi,

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(\alpha t)dt = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{\alpha}\sin(\alpha t)\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\alpha\pi}\sin(\alpha\pi)$$

3. La série de Fourier de f est donc

$$S_f(t) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi} + \frac{2\alpha\sin(\alpha\pi)}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\alpha^2-n^2}\cos(nt)$$

D'autre part, f étant continue sur $\mathbb{R}$ (puisque $f(-\pi) = f(\pi)$), on a

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad f(t) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi} + \frac{2\alpha\sin(\alpha\pi)}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\alpha^2-n^2}\cos(nt)$$

4. D'après l'égalité ci-dessus, on a
   - pour $t = 0$:

$$1 = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi} + \frac{2\alpha\sin(\alpha\pi)}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\alpha^2-n^2} = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi}\left(1 - 2\alpha\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\alpha^2-n^2}\right)$$

   D'où

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2-\alpha^2} = \frac{1}{2\alpha}\left(\frac{\alpha\pi}{\sin(\alpha\pi)} - 1\right) = \frac{\pi}{2\sin(\alpha\pi)} - \frac{1}{2\alpha}$$

   - pour $t = \pi$:

$$\cos(\alpha\pi) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi} + \frac{2\alpha\sin(\alpha\pi)}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\alpha^2-n^2}(-1)^n = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi}\left(1 - 2\alpha\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\alpha^2-n^2}\right)$$

   D'où

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2-\alpha^2} = \frac{1}{2\alpha}\left(\frac{\alpha\pi}{\sin(\alpha\pi)\cos(\alpha\pi)} - 1\right) = \frac{\pi}{\sin(2\alpha\pi)} - \frac{1}{2\alpha}$$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 :

1. En passant le système $(S) + (C.I.)$ au filtre de Laplace (en se basant sur les transformées de Laplace des fonctions sinus et cosinus données par le formulaire et sur le

fait que la TL est linéaire), on obtient

$$(S)+(C.I.) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} pX & = & Y+\dfrac{1}{p^2+1} \\ & & \\ pY-1 & = & -X+2Y-\dfrac{p}{p^2+1} \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcl} pX & - & Y & = & \dfrac{1}{p^2+1} \\ & & & & \\ X & + & (p-2)Y & = & 1-\dfrac{p}{p^2+1} \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -Y-p(p-2)Y & = & \dfrac{1}{p^2+1}-p+\dfrac{p^2}{p^2+1} \qquad (L_1 \leftarrow L_1-pL_2) \\ & & \\ X & = & 1-\dfrac{p}{p^2+1}-(p-2)Y \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -Y(p^2-2p+1) & = & 1-p \\ & & \\ X & = & 1-\dfrac{p}{p^2+1}-(p-2)Y \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} Y & = & \dfrac{p-1}{(p-1)^2} = \dfrac{1}{p-1} \\ & & \\ X & = & 1-\dfrac{p}{p^2+1}-\dfrac{p-1-1}{p-1} = \dfrac{1}{p-1} - \dfrac{p}{p^2+1} \end{array}\right.$$

2. On obtient alors l'unique solution du système $(S)+(C.I.)$ en "remontant" les transformées de Laplace obtenues à la question précédente. Ainsi

$$\left\{\begin{array}{rcr} x(t) & = & e^t-\cos(t) \\ y(t) & = & e^t \end{array}\right.$$

⋆ ⋆
⋆