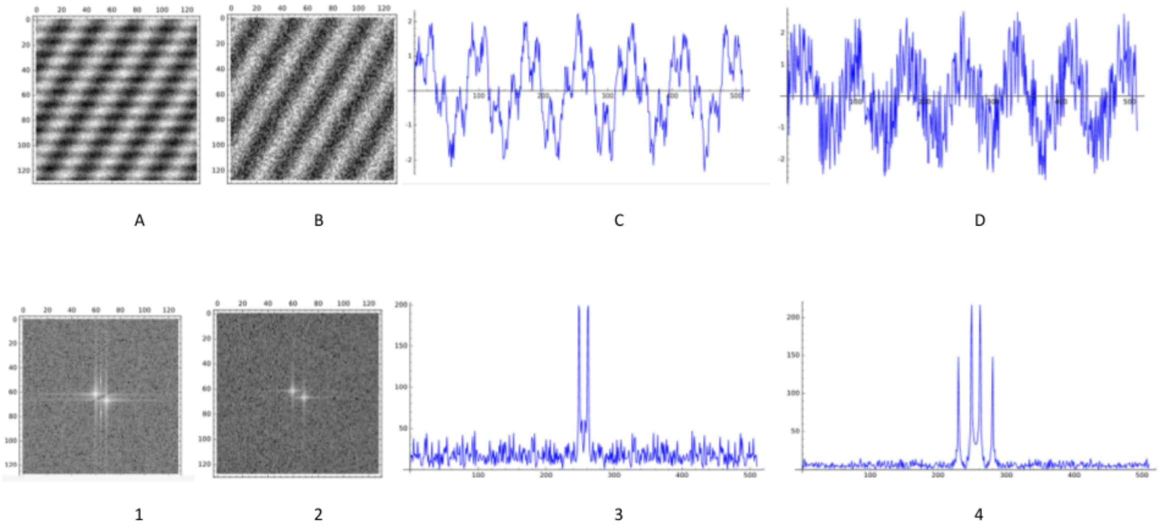
CONTRÔLE CONTINU

Séries de Fourier / Transformée de Laplace.

Durée : 1h30 *Calculatrices autorisées et formulaires autorisés.*

Tous les exercices sont indépendants.
Il sera tenu compte de la présentation et de la rédaction.

Exercice 1 Associer à chaque signal (en haut) sa transformée de Fourier (en bas). On justifiera rapidement ces associations.



★★★★★★★★★★★★★★★★★

Exercice 2 Soit f la fonction 2π-périodique définie par

$$\forall t \in [-\pi, \pi], \quad f(t) = t^2.$$

1. Tracer le graphe de f sur $[-3\pi, 3\pi]$.
2. Calculer les coefficients de Fourier réels de f.
3. En s'appuyant sur la série de Fourier de f, calculer les sommes

$$S_1 = \sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}, \qquad S_2 = \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2}.$$

4. À l'aide de l'égalité de Parseval, calculer

$$S_3 = \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^4}.$$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 Soit f la fonction 2π-périodique définie par

$$\forall t \in [-\pi, \pi], \qquad f(t) = \cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

1. Tracer le graphe de f sur $[-4\pi, 4\pi]$.
2. Calculer les coefficients de Fourier complexes de f.
3. Montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad f(t) = \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{2\pi} + \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} \cos(nt)$$

4. En déduire la valeur des sommes

$$S_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1} \qquad \text{et} \qquad S_2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 4 Soient ω et ω_0 deux réels et

$$(S) \ : \ \begin{cases} y'' + \omega_0^2 y = \sin(\omega t) \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

le problème différentiel d'inconnue y. On note Y la transformée de Laplace de y.

1. On suppose ici que $\omega \neq \omega_0$.
   (a) En passant l'équation du problème (S) au filtre de Laplace, déterminer Y.
   (b) Déterminer deux réels α et β tels que

$$\frac{\omega}{(p+\omega^2)(p+\omega_0^2)} = \frac{\alpha}{p+\omega^2} + \frac{\beta}{p+\omega_0^2}$$

   (c) En déduire l'unique solution de (S).
2. On suppose maintenant que $\omega = \omega_0$.
   (a) Montrer que

$$\frac{\omega}{(p^2+\omega^2)^2} = \frac{1}{4\omega}\left(\frac{i}{\omega(p+i\,\omega)} - \frac{i}{\omega(p-i\,\omega)} - \frac{1}{(p+i\,\omega)^2} - \frac{1}{(p-i\,\omega)^2}\right)$$

   (b) En déduire l'unique solution de (S) dans le cas où $\omega = \omega_0$ (on s'attachera à exprimer y à l'aide des fonctions trigonométriques sinus et/ou cosinus).

⋆ ⋆
⋆

CORRECTION

Exercice 1 :

— Le signal A correspond à la transformée 1 car on distingue, dans ce signal en 2D, deux fréquences principales, que l'on retrouve dans les quatre pics que la transformée 1.

— Le signal B correspond à la transformée 2 car on ne distingue qu'une fréquence sur ce signal 2D, qui correspond aux deux pics de la transformée 2.

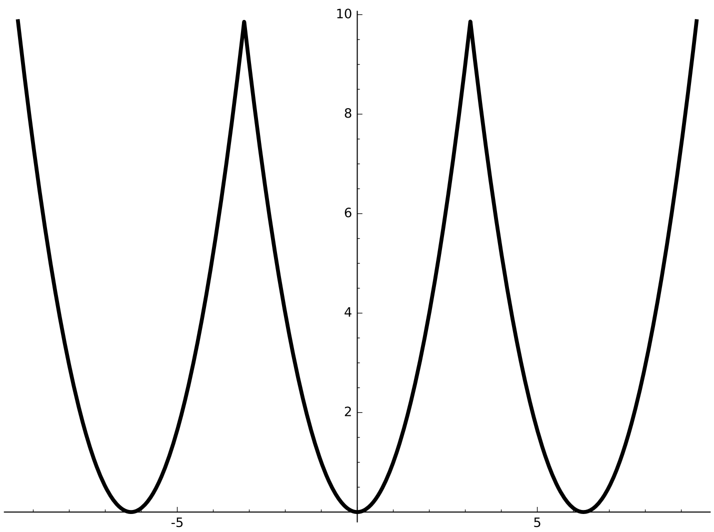
— Le signal C correspond à la transformée 4 car il est peu bruité et semble contenir deux signaux périodiques superposés.

— Le signal D correspond à la transformée 3 par élimination.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 :

1.



2. La fonction f étant paire, on a $b_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on calcule $a_n(f)$ à l'aide de deux intégrations par parties

successives :

$$\begin{aligned}
a_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)dt \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} t^2\cos(nt)dt \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\left[\frac{t^2}{n}\sin(nt)\right]_0^{\pi} - \frac{2}{n}\int_0^{\pi} t\sin(nt)dt\right) \\
&= -\frac{4}{n\pi}\int_0^{\pi} t\sin(nt)dt \\
&= -\frac{4}{n\pi}\left(\left[-\frac{t}{n}\cos(nt)\right]_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos(nt)dt\right) \\
&= 4\frac{(-1)^n}{n^2}
\end{aligned}$$

et

$$a_0(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t^2 dt = \frac{2}{\pi}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}$$

3. La fonction f étant continue sur $\mathbb{R}$, elle est partout égale à sa série de Fourier :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad f(t) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nt)$$

En particulier,

— En $\underline{t=0}$, on a

$$f(0) = 0 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} \iff \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$$

— En $\underline{t=\pi}$, on a

$$\begin{aligned}
f(\pi) = \pi^2 &= \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}(-1)^n = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} \\
\iff \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} &= \frac{1}{4}\left(\pi^2 - \frac{\pi^2}{3}\right) = \frac{\pi^2}{6}
\end{aligned}$$

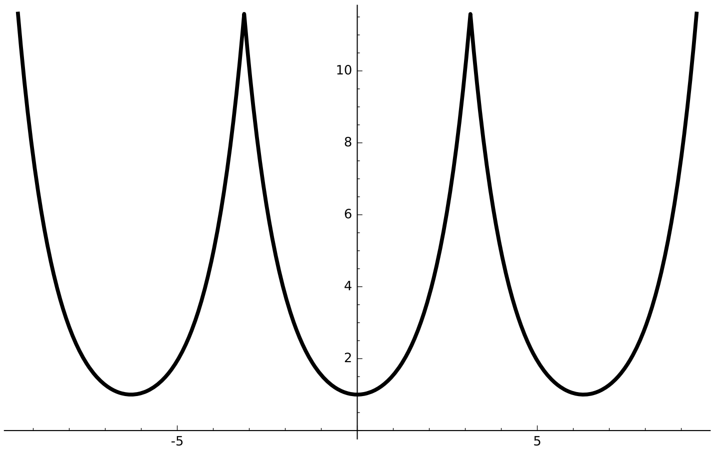
4. D'après l'égalité de Pasceval, on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^2 dt &= \frac{a_0(f)^2}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n(f)^2 + b_n(f)^2}{4} \\
\iff \quad \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t^4 dt &= \frac{\pi^4}{9} + 8\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} \\
\iff \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} &= \frac{1}{8}\left(\frac{1}{\pi}\left[\frac{t^5}{5}\right]_0^{\pi} - \frac{\pi^4}{9}\right) = \frac{\pi^4}{90}
\end{aligned}$$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 :

1.



2. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a

$$\begin{aligned}
c_n(f) &= \frac{1}{2\pi}\int_{[2\pi]} f(t)e^{-int}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^t+e^{-t}}{2}e^{-int}dt \\
&= \frac{1}{4\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} e^{(1-in)t}+e^{(-1-in)t}dt\right) \\
&= \frac{1}{4\pi}\left[\frac{e^{(1-in)t}}{1-in}-\frac{e^{(-1-in)t}}{1+in}\right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{1}{4\pi}\left[\left(\frac{e^t}{1-in}-\frac{e^{-t}}{1+in}\right)e^{-int}\right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{(-1)^n}{4\pi}\left(\frac{e^{\pi}}{1-in}-\frac{e^{-\pi}}{1+in}-\frac{e^{-\pi}}{1-in}+\frac{e^{\pi}}{1+in}\right) \\
&= \frac{(-1)^n}{2\pi}\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{1+n^2}
\end{aligned}$$

3. La fonctions f étant continue, elle est partout égale à sa série de Fourier. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e^{int} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(f)e^{int} + c_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n(f)e^{int} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n}(f)e^{-int} + c_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n(f)e^{int} \\
&= c_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n(f)(e^{int} + e^{-int}) \quad \text{car } c_{-n} = c_n \\
&= c_0(f) + 2\sum_{n=1}^{+\infty} c_n(f)\cos(nt)
\end{aligned}$$

   On retrouve la forme proposée en remplaçant les coefficients de Fourier par le résultat obtenu à la question précédente.

4. Comme à l'exercice précédent, on retrouve les sommes cherchées en en posant $t = 0$ puis $t = \pi$.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 4 :

1. (a) En passant à la transformée de Laplace dans l'équation précédente (et en notant $Y = \mathcal{L}(y)$), on obtient :

$$(S) \iff p^2Y + \omega_0^2Y = \frac{\omega}{p^2+\omega^2} \iff Y(p) = \frac{\omega}{(p^2+\omega_0^2)(p^2+\omega^2)}$$

   (b) On cherche α et β tels que $\dfrac{\omega}{(p^2+\omega_0^2)(p^2+\omega^2)} = \dfrac{\alpha}{p^2+\omega_0^2} + \dfrac{\beta}{p^2+\omega^2}$. Or

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha}{p^2+\omega_0^2} + \frac{\beta}{p^2+\omega^2} &= \frac{\alpha(p^2+\omega^2) + \beta(p^2+\omega_0^2)}{(p^2+\omega^2)(p^2+\omega_0^2)} \\
&= \frac{(\alpha+\beta)p^2 + \alpha\omega^2 + \beta\omega_0^2}{(p^2+\omega^2)(p^2+\omega_0^2)}
\end{aligned}$$

   Par identification du polynôme présent au numérateur, on obtient le système

$$\left\{\begin{array}{lcl} \alpha+\beta & = & 0 \\ \alpha\omega^2 + \beta\omega_0^2 & = & \omega \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} \alpha & = & \dfrac{\omega}{\omega^2-\omega_0^2} \\ & & \\ \beta & = & \dfrac{\omega}{\omega_0^2-\omega^2} \end{array}\right.$$

   Et

$$\frac{\omega}{(p^2+\omega_0^2)(p^2+\omega^2)} = \frac{\omega}{\omega^2-\omega_0^2}\left(\frac{1}{p^2+\omega_0^2} - \frac{1}{p^2+\omega^2}\right)$$

(c) D'après la question précédente, on a

$$Y(p) = \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2}\left(\frac{\omega}{\omega_0}.\frac{\omega_0}{p^2+\omega_0^2} - \frac{\omega}{p^2+\omega^2}\right)$$

D'où

$$y(t) = \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2}\left(\frac{\omega}{\omega_0}.\sin(\omega_0 t) - \sin(\omega t)\right).H(t)$$

2. (a) En réduisant le membre de droite de l'égalité proposée au même dénominateur, on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4\omega}\left(\frac{i}{\omega(p+i\,\omega)} - \frac{i}{\omega(p-i\,\omega)} - \frac{1}{(p+i\,\omega)^2} - \frac{1}{(p-i\,\omega)^2}\right)\\
=&\frac{i(p+i\omega)(p-i\omega)^2 - i(p-i\omega)(p+i\omega)^2 - \omega(p-i\omega)^2 - \omega(p+i\omega)^2}{4\omega^2(p^2+\omega^2)^2}\\
=&\frac{i(p^2+\omega^2)(p-i\omega-p-i\omega) - \omega(p^2-ip\omega-\omega^2+p^2+ip\omega-\omega^2)}{4\omega^2(p^2+\omega^2)^2}\\
=&\frac{2\omega(p^2+\omega^2) - 2\omega(p^2-\omega^2)}{4\omega^2(p^2+\omega^2)^2} = \frac{\omega}{(p^2+\omega^2)^2}
\end{aligned}$$

(b) En calculant la transformée de Laplace inverse de l'expression ci-dessus, on trouve

$$\begin{aligned}
y(t) &= \frac{1}{4\omega}\left(\frac{i}{\omega}e^{-i\omega t} - \frac{i}{\omega}e^{i\omega t} - t.e^{-i\omega t} - t.e^{i\omega t}\right).H(t)\\
&= \frac{1}{2\omega}\left(\frac{\sin(\omega t)}{\omega} - t\cos(\omega t)\right).H(t)
\end{aligned}$$

⋆ ⋆
⋆