# CONTRÔLE CONTINU

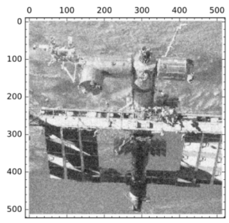
Séries de Fourier, transformée de Laplace

Durée : 1h30. *Calculatrices et formulaires autorisés.*

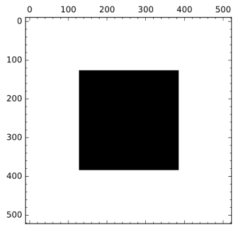
Tous les exercices sont indépendants
Il sera tenu compte de la rédaction et la présentation

**Exercice 1** 1. Trouver le masque qui permet d'obtenir l'image filtrée à partir de l'image originale :

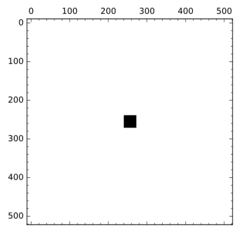
Image originale



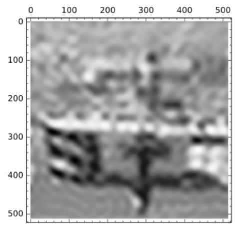
Masque $A$



Masque $B$

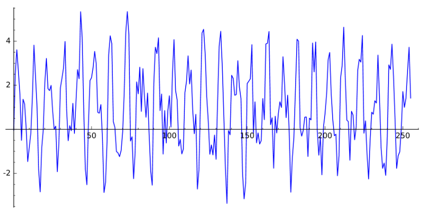


Imagie filtrée

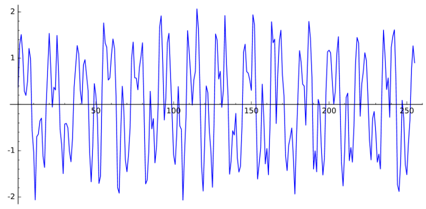


2. Associer une transformée de Fourier à chacun des signaux $A$ et $B$ ci-dessous.

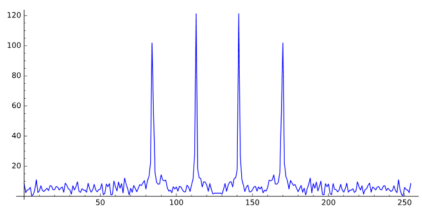
Signal $A$



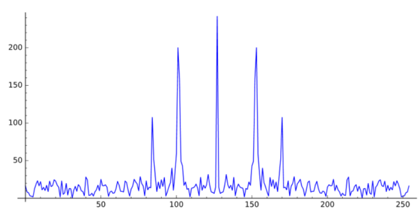
Signal $B$



FFT 1



FFT 2



⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

**Exercice 2** Soit $f$ la fonction $2\pi$-périodique vérifiant

$$\forall t \in [0, 2\pi[, \quad f(t) = (t - \pi)^2$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $a_n(f)$ et $b_n(f)$ les coefficients de Fourier réels de $f$.

1. Tracer le graphe de $f$ sur l'intervalle $[-4\pi, 4\pi]$.

2. Justifier graphiquement que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n(f) = 0$.
3. À l'aide de deux intégrations par parties successives, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $a_n(f) = \dfrac{4}{n^2}$.
4. Calculer $a_0(f)$.
5. En déduire une expression de $f(t)$ sous la forme d'une série de trigonométrique (on justifiera l'égalité pour tout $t \in \mathbb{R}$).
6. Déduire des calculs précédents la valeur de la somme $S_2 = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.
7. Déterminer la valeur de la somme $S_4 = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

**Exercice 3** 1. Un calcul préliminaire

On rappelle que la fonction de Dirac est la fonction $\delta$ définie par

$$\delta(t) = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad t = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

D'un point de vue analytique, cette fonction est obtenue en passant à la limite $\varepsilon \to 0$ dans la fonction $K_\varepsilon \,:\, t \mapsto \frac{1}{\varepsilon}(H(t) - H(t-\varepsilon))$.

(a) Tracer le graphe de la fonction $K_\varepsilon$.

(b) À l'aide de la définition, calculer la transformée de Laplace de $K_\varepsilon$.

(c) En passant à la limite $\varepsilon \to 0$, retrouver la transformée de Laplace de la fonction $\delta$.

2. *Application*

On note $(P)$ le problème différentiel suivant :

$$(P) \,:\, \begin{cases} y'' + 2y' + 2y = \delta \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

le symbole $\delta$ représentant l'impulsion de Dirac. On admet que ce problème admet une unique solution (que l'on note encore $y$).

(a) Montrer que si l'on note $Y$ la transformée de Laplace de la solution $y$ de $(P)$, alors

$$Y(p) = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p+1-i} - \frac{1}{p+1+i}\right)$$

(b) En déduire l'unique solution $y$ de $(P)$ sous forme explicite et tracer une esquisse de sa courbe (on s'attachera à exprimer $y$ à l'aide des fonctions trigonométriques).

(c) Quel système dynamique est modélisé ici par ce problème différentiel ?

⋆ ⋆
⋆

<u>CORRECTION</u>

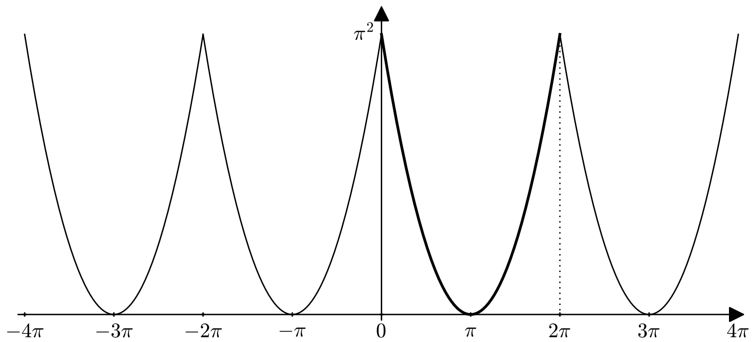
**Exercice 1** :

1. Le masque appliqué est le masque $B$.
2. On a Signal $A \leftrightarrow$ FFT 2 et Signal $B \leftrightarrow$ FFT 1

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

**Exercice 2** :

1.




2. D'après le graphe, la fonction $f$ est paire. Donc $b_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$a_n(f) = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(t-\pi)^2\cos(nt)dt$$

En posant $\left\{\begin{array}{rclcrcl} u(t) & = & (t-\pi)^2 & \Rightarrow & u'(t) & = & 2(t-\pi) \\ v'(t) & = & \cos(nt) & \Rightarrow & v(t) & = & \frac{1}{n}\sin(nt) \end{array}\right.$ il vient

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{1}{\pi}\left(\cancel{\left[\frac{(t-\pi)^2}{n}\sin(nt)\right]_0^{2\pi}} - \frac{2}{n}\int_0^{2\pi}(t-\pi)\sin(nt)dt\right) \\ &= -\frac{2}{n\pi}\int_0^{2\pi}(t-\pi)\sin(nt)dt \end{aligned}$$

En posant alors $\left\{\begin{array}{rclcrcl} u(t) & = & (t-\pi) & \Rightarrow & u'(t) & = & 1 \\ v'(t) & = & \sin(nt) & \Rightarrow & v(t) & = & -\frac{1}{n}\cos(nt) \end{array}\right.$ il vient

$$\begin{aligned} a_n(f) &= -\frac{2}{n\pi}\left(\left[\frac{-(t-\pi)}{n}\cos(nt)\right]_0^{2\pi} - \cancel{\frac{1}{n}\int_0^{2\pi}\cos(nt)dt}\right) \\ &= \frac{2}{n^2\pi}\left(\pi\cos(2n\pi) - (-\pi)\cos(0)\right) = \frac{4}{n^2} \end{aligned}$$

4. Par définition,

$$\begin{aligned} a_0(f) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(t-\pi)^2 dt \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{(t-\pi)^3}{3}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^3}{3} - \frac{(-\pi)^3}{3}\right) = \frac{2\pi^2}{3} \end{aligned}$$

5. Puisque la fonction $f$ est continue (c.f. graphe), elle est partout égale à sa série de Fourier. Autrement dit,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = S_f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f)\cos(nt) + b_n(f)\sin(nt)$$
$$f(t) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\cos(nt)$$

6. En $t = 0$, l'égalité précédente donne :

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$
$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4}\left(\pi^2 - \frac{\pi^2}{3}\right) = \frac{\pi^2}{6}$$

7. D'après l'égalité de Parseval, on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)^2 dt = \frac{a_0^2}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}$$

Or

$$\int_0^{2\pi} f(t)^2 dt = \int_0^{2\pi} (t-\pi)^4 dt = \left[\frac{(t-\pi)^5}{5}\right]_0^{2\pi} = \frac{2\pi^5}{5}$$

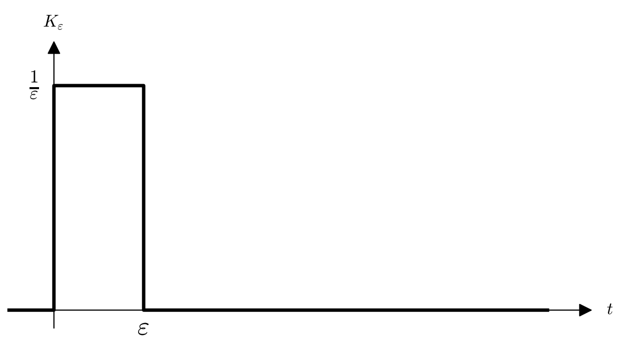
Donc

$$\frac{\pi^4}{5} = \frac{4\pi^4}{4 \times 9} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{16}{2n^4} = \frac{\pi^4}{9} + 8\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$$
$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{1}{8}\left(\frac{\pi^4}{5} - \frac{\pi^4}{9}\right) = \frac{\pi^4}{90}$$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

**Exercice 3** :

1. (a)



(b) On rappelle que $\mathcal{L}(f)(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$. Ainsi,

$$\mathcal{L}(K_\varepsilon)(p) = \int_0^{+\infty} K_\varepsilon(t)e^{-pt}dt = \int_0^{\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon}e^{-pt}dt$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}\left[-\frac{1}{p}e^{-pt}\right]_0^{\varepsilon} = \frac{1}{p\varepsilon}(1-e^{-p\varepsilon})$$

(c) En s'appuyant sur le développement limité $e^u = 1 + u + o(u)$ en $u = p\varepsilon$, on a

$$\frac{1-e^{-p\varepsilon}}{p\varepsilon} = \frac{p\varepsilon + o(p\varepsilon)}{p\varepsilon} = 1 + o(1) \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 1$$

Donc

$$\mathcal{L}(\delta)(p) = \lim_{\varepsilon \to 0} \mathcal{L}(K_\varepsilon)(p) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1-e^{-p\varepsilon}}{p\varepsilon} = 1$$

2. (a) En appliquant la transformée de Laplace au problème $(P)$ et en posant $Y(p) = \mathcal{L}(y)(p)$, on a

$$(P) \iff \left\{ \begin{array}{lcl} \mathcal{L}(y'') + 2\mathcal{L}(y') + 2\mathcal{L}(y) & = & \mathcal{L}(\delta) \\ y(0) = y'(0) = 0 & & \end{array} \right.$$

$$\iff p^2Y + 2pY + 2Y = 1$$

$$\iff Y(p) = \frac{1}{p^2+2p+2}$$

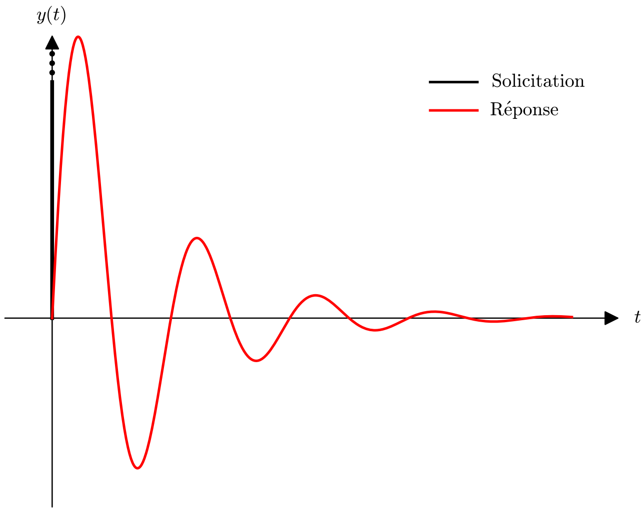
Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p+1-i} - \frac{1}{p+1+i}\right) &= \frac{1}{2i}.\frac{(\cancel{p+1}+i)-(\cancel{p+1}-i)}{(p+1+i)(p+1-i)} \\ &= \frac{\cancel{2i}}{\cancel{2i}((p+1)^2-i^2))} \\ &= \frac{1}{p^2+2p+2} = Y(p) \end{aligned}$$

(b) On obtient $y(t)$ en appliquant la transformée de Fourier inverse à la fonction $Y(p)$ ci-dessus :

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{2i}\left(e^{(-1+i)t}.H(t) - e^{(-1-i)t.H(t)}\right) \\ &= e^{-t}.H(t)\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i} = e^{-t}.H(t).\sin(t) \end{aligned}$$

3. En superposant le signal $\delta$ et la solution $y$, on obtient :




4. Ce modèle correspond à un système oscillant amorti, stimulé au repos ($y(0) = y'(0) = 0$) par une impulsion (la fonction de Dirac). Après l'impulsion, le système entre en oscillations amorties. Cela peut par exemple correspondre à un système masse/ressort avec frottements.

⋆ ⋆
⋆