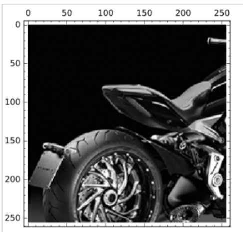
CONTRÔLE CONTINU

Séries de Fourier, transformée de Laplace

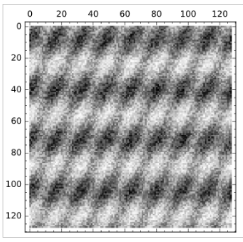
Durée : 1h30. *Calculatrices et formulaires autorisés.*

Tous les exercices sont indépendants
Il sera tenu compte de la rédaction et la présentation

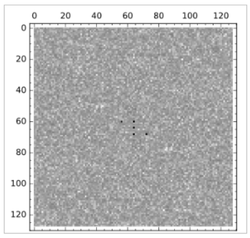
Exercice 1 Associer deux à deux les images ci-dessous (signal original $\leftrightarrow$ transformée de Fourier).



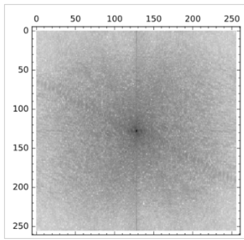
A



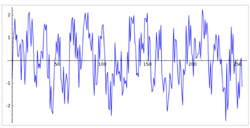
B



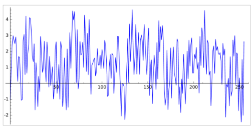
I



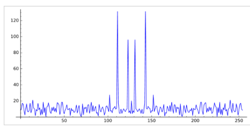
II



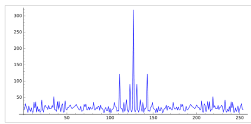
C



D



III



IV

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 1. Soit f la fonction 2π-périodique et impaire définie par

$$\forall t \in]0, \pi[, \qquad f(t) = \frac{\pi - t}{2}$$

(a) Tracer le graphe de f sur $[-4\pi, 4\pi]$.

(b) Montrer que les coefficients de Fourier réels $a_n(f)$ et $b_n(f)$ vérifient

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \begin{cases} a_n(f) & = & 0 \\ b_n(f) & = & \dfrac{1}{n} \end{cases}$$

(c) En déduire une expression de $f(t)$ sous la forme d'une série trigonométrique. On précisera les valeurs de t pour lesquelles cette égalité est vérifiée.

(d) Calculer $S_1 = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n}$.

2. Soit g la fonction définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad g(t) = f(t+1) - f(t-1)$$

   (a) Montrer que g est 2π-périodique.

   (b) Montrer que g est paire.

   (c) Montrer que

$$\begin{cases} \forall t \in [0,1[, & g(t) = \pi - 1 \\ \forall t \in [1, \pi-1[, & g(t) = -1 \\ \forall t \in [\pi-1, \pi[, & g(t) = -1 \end{cases}$$

   (d) Montrer que les coefficients de Fourier réels $a_n(g)$ et $b_n(g)$ vérifient

$$a_0(g) = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \begin{cases} a_n(g) & = & 2\dfrac{\sin(n)}{n} \\ & & \\ b_n(g) & = & 0 \end{cases}$$

3. Montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(n)}{n^2}$$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 Soient ω et ω_0 deux réels et

$$(S)\ :\ \begin{cases} y'' + \omega_0^2 y = \sin(\omega t).H(t) \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

le problème différentiel d'inconnue y. On note Y la transformée de Laplace de y.

1. On suppose ici que $\omega \neq \omega_0$.

   (a) En passant l'équation du problème (S) au filtre de Laplace, déterminer Y.

   (b) Déterminer deux réels α et β tels que

$$\frac{\omega}{(p^2+\omega^2)(p^2+\omega_0^2)} = \frac{\alpha}{p^2+\omega^2} + \frac{\beta}{p^2+\omega_0^2}$$

   (c) En déduire l'unique solution de (S).

2. On suppose maintenant que $\omega = \omega_0$.

   (a) Montrer que

$$\frac{\omega}{(p^2+\omega^2)^2} = \frac{1}{4\omega}\left(\frac{i}{\omega(p+i\,\omega)} - \frac{i}{\omega(p-i\,\omega)} - \frac{1}{(p+i\,\omega)^2} - \frac{1}{(p-i\,\omega)^2}\right)$$

   (b) En déduire l'unique solution de (S) dans le cas où $\omega = \omega_0$ (on s'attachera à exprimer y à l'aide des fonctions trigonométriques sinus et/ou cosinus).

3. Quelle différence qualitative peut-on mettre en évidence entre les deux cas étudiés ci-dessus ?

⋆ ⋆
⋆

Transformée de Laplace, formulaire

Fonctions usuelles

Dans le tableau ci dessous, H désigne la *fonction échelon*, définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad H(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t \geqslant 0, \\ 0 & \text{si} \quad t < 0. \end{cases}$$

D'autre part, a désigne un nombre complexe quelconque, ω un nombre réel quelconque et δ désigne la fonction de Dirac.

$$\boxed{\underline{\text{Rappel}} : \mathcal{L}(f)(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt}$$

Fonction originale f	Transformée $\mathcal{L}(f)$	Domaine d'existence
$\delta(t)$	$\mathcal{L}(\delta)(p) = 1$	$\mathbb{C}$
$H(t)$	$\mathcal{L}(H)(p) = \dfrac{1}{p}$	$\text{Re}(p) > 0$
$t.H(t)$	$\mathcal{L}(t.H(t))(p) = \dfrac{1}{p^2}$	$\text{Re}(p) > 0$
$t^n.H(t)$	$\mathcal{L}(t^n.H(t))(p) = \dfrac{n!}{p^{n+1}}$	$\text{Re}(p) > 0$
$e^{at}.H(t)$	$\mathcal{L}(e^{at}.H(t))(p) = \dfrac{1}{p-a}$	$\text{Re}(p) > \text{Re}(a)$
$\cos(\omega t).H(t)$	$\mathcal{L}(\cos(\omega t).H(t))(p) = \dfrac{p}{p^2+\omega^2}$	$\text{Re}(p) > 0$
$\sin(\omega t).H(t)$	$\mathcal{L}(\sin(\omega t).H(t))(p) = \dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$	$\text{Re}(p) > 0$
$\cosh(at).H(t)$	$\mathcal{L}(\cosh(at).H(t))(p) = \dfrac{p}{p^2-a^2}$	$\text{Re}(p) > \text{Re}(a)$
$\sinh(at).H(t)$	$\mathcal{L}(\sinh(at).H(t))(p) = \dfrac{a}{p^2-a^2}$	$\text{Re}(p) > \text{Re}(a)$

Formules

Dans le tableau ci-dessous, f et g sont deux fonctions admettant une transformée de Laplace, les paramètres λ, μ et α sont des nombres réels et l'opérateur $\star$ désigne le produit de convolution :

$$(f \star g)(t) = \int_0^t f(u)g(t-u)du.$$

Linéarité	:	$\mathcal{L}(\lambda.f + \mu.g)(p)$	$=$	$\lambda.\mathcal{L}(f)(p) + \mu.\mathcal{L}(g)(p)$
Multiplication	:	$\mathcal{L}(f \times g)(p)$	$=$	$\left(\mathcal{L}(f) \star \mathcal{L}(g)\right)(p)$
Convolution	:	$\mathcal{L}(f \star g)(p)$	$=$	$\mathcal{L}(f)(p) \times \mathcal{L}(g)(p)$
Dérivée	:	$\mathcal{L}(f')(p)$	$=$	$p\mathcal{L}(f)(p) - f(0)$
Dérivée seconde	:	$\mathcal{L}(f'')(p)$	$=$	$p^2\mathcal{L}(f)(p) - pf(0) - f'(0)$
Primitive	:	$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(u)du\right)(p)$	$=$	$\frac{1}{p}\mathcal{L}(f)(p)$
Amortissement	:	$\mathcal{L}(f(t)e^{\alpha t})(p)$	$=$	$\mathcal{L}(f)(p-\alpha)$
Dilatation	:	$\mathcal{L}(f(\alpha t))(p)$	$=$	$\dfrac{1}{\alpha}\mathcal{L}(f)\left(\dfrac{p}{\alpha}\right)$
Retard	:	$\mathcal{L}(f(t-\alpha))(p)$	$=$	$e^{-\alpha p}\mathcal{L}(f)(p)$

CORRECTION

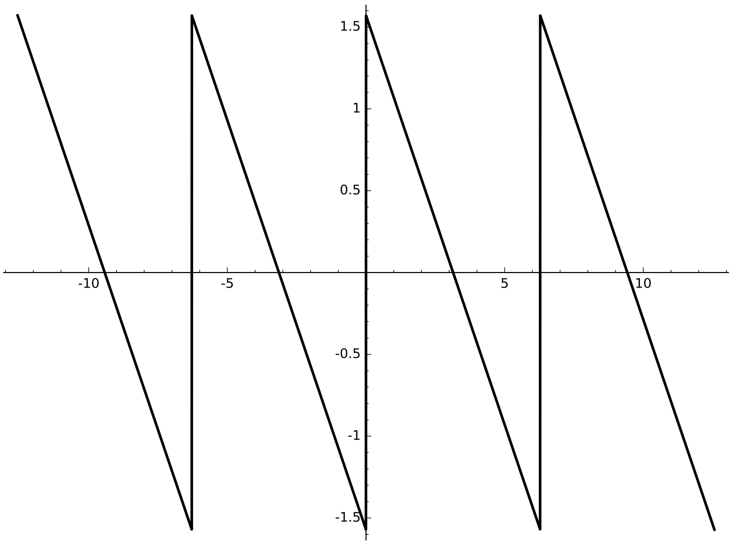
Exercice 1 :

$$A \leftrightarrow \mathrm{II} \qquad B \leftrightarrow \mathrm{I} \qquad C \leftrightarrow \mathrm{III} \qquad D \leftrightarrow \mathrm{IV}$$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 :

1.



(a)

(b) La fonction étant 2π-périodique, on a $T = 2\pi$ et $\omega = 1$. De plus, la fonction f étant par définition impaire, on a $a_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'autre part, f étant impaire, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} b_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{[2\pi]} f(t)\sin(nt)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)dt \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\pi - t}{2}\sin(nt)dt \end{aligned}$$

On pose

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{\pi - t}{2} &\Rightarrow\quad u'(t) &= -\frac{1}{2} \\ v'(t) &= \sin(nt) &\Rightarrow\quad v(t) &= -\frac{1}{n}\cos(nt) \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} b_n(f) &= \frac{2}{\pi}\left(\left[-\frac{\pi - t}{2n}\cos(nt)\right]_0^{\pi} - \cancel{\frac{1}{2n}\int_0^{\pi}\cos(nt)dt}\right) \\ &= \frac{2}{\pi}.\frac{\pi}{2n} = \frac{1}{n} \end{aligned}$$

(c) La fonction f n'est pas continue sur $\mathbb{R}$ mais les points de discontinuité sont les $t_k = 2k\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$. Hors de ces points, on a donc

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f)\cos(nt) + b_n(f)\sin(nt) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nt)}{n} \end{aligned}$$

(d) En particulier, pour $t = 1$, on a

$$\frac{\pi - 1}{2} = f(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n}$$

2. (a) La fonction f étant 2π-périodique, on a

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g(t+2\pi) = f(t+2\pi+1) - f(t+2\pi-1) = f(t+1) - f(t-1) = g(t)$$

donc g est 2π-périodique.

(b) La fonction f étant impaire, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a également

$$g(-t) \;=\; f(-t+1) - f(-t-1) \;=\; -f(t-1) + f(t+1) \;=\; g(t)$$

Donc g est paire.

(c) — Pour tout $t \in [0,1[$, on a
- $t+1 \in [1,2[\subset [0,\pi[$. Donc $f(t+1) = \dfrac{\pi-(t+1)}{2}$.
- $t-1 \in [-1,0[\subset]-\pi,0[$. Donc $1-t \in]0,1[$ et $f(t-1) = -f(1-t) = -\dfrac{\pi-(1-t)}{2}$.

Donc

$$\forall t \in [0,1[, \quad g(t) = f(t+1) - f(t-1) = \frac{\pi-(t+1)}{2} + \frac{\pi-(1-t)}{2} = \pi - 1$$

— Pour tout $t \in]1,\pi-1[$, on a
- $t+1 \in [2,\pi[\subset [0,\pi[$. Donc $f(t+1) = \dfrac{\pi-(t+1)}{2}$.
- $t-1 \in [0,\pi-2[\subset]0,\pi[$. Donc $f(t-1) = \dfrac{\pi-(t-1)}{2}$.

Donc

$$\forall t \in]1,\pi-1[, \quad g(t) = f(t+1) - f(t-1) = \frac{\pi-(t+1)}{2} - \frac{\pi-(t-1)}{2} = -1$$

— Pour tout $t \in]\pi-1,\pi[$, on a
- $t+1 \in]\pi,\pi+1[$. Donc $t+1-2\pi \in]-\pi,-\pi+1[\subset]-\pi,0[$. Donc

$$f(t+1) = f(t+1-2\pi) = -f(2\pi-t-1) = -\frac{\pi-(2\pi-t-1)}{2} = \frac{\pi-t-1}{2}$$

- $t-1 \in [\pi-2,\pi-1[\subset]0,\pi[$. Donc $f(t-1) = \dfrac{\pi-(t-1)}{2}$.

Donc

$$\forall t \in]1,\pi-1[, \quad g(t) = f(t+1) - f(t-1) = \frac{\pi-t-1}{2} - \frac{\pi-(t-1)}{2} = -1$$

(d) On peut bien entendu calculer explicitement les coefficients de Fourier de g à l'aide de la définition. On obtient en particulier que, la fonction g étant paire, on a $b_n(g) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Cependant, à l'aide des outils du calcul intégral, on peut également montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
a_n(g) &= \frac{1}{\pi}\int_{[2\pi]} g(t)\cos(nt)dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{[2\pi]} f(t+1)\cos(nt)dt - \frac{1}{\pi}\int_{[2\pi]} f(t-1)\cos(nt)dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{2\pi-1} f(t+1)\cos(nt)dt - \frac{1}{\pi}\int_{1}^{2\pi+1} f(t-1)\cos(nt)dt
\end{aligned}$$

En posant les changements de variable

$$u = t+1 \qquad \text{et} \qquad v = t-1$$

respectivement dans la première et la seconde intégrale ci-dessus, on obtient

$$\begin{aligned}
a_n(g) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(u)\cos(nu-n)du - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(v)\cos(nv+n)dv \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)(\cos(nt-n) - \cos(nt+n))dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)2\sin(n)\sin(nt)dt \\
&= 2\sin(n).b_n(f)
\end{aligned}$$

Ainsi

$$a_0(g) = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n(g) = 2\frac{\sin(n)}{n}$$

3. En appliquant l'égalité de Parseval à la fonction g, on a :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{[2\pi]} |g(t)|^2 dt = \frac{a_0(g)^2}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n(g)^2 + b_n(g)^2}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4\sin^2(n)}{2n^2}$$

Or d'après les calculs explicites de $g(t)$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{[2\pi]} |g(t)|^2 dt &= \frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi} g(t)^2 dt \qquad\qquad \text{car } g^2 \text{ est paire} \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\int_0^1 (\pi-1)^2 dt + \int_1^{\pi} (-1)^2 dt\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\big((\pi-1)^2 + (\pi-1)\big) \\
&= \pi - 1
\end{aligned}$$

En regroupant l'ensemble des résultats ci-dessus, on établie que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(n)}{n^2} = \frac{1}{2}.\frac{1}{2\pi}\int_{[2\pi]} |g(t)|^2 dt = \frac{\pi-1}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n}$$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 :

1. (a) En passant à la transformée de Laplace dans l'équation précédente (et en notant $Y = \mathcal{L}(y)$), on obtient :
$$(S) \iff p^2Y + \omega_0^2 Y = \frac{\omega}{p^2+\omega^2} \iff Y(p) = \frac{\omega}{(p^2+\omega_0^2)(p^2+\omega^2)}$$
   (b) On cherche α et β tels que $\dfrac{\omega}{(p^2+\omega_0^2)(p^2+\omega^2)} = \dfrac{\alpha}{p^2+\omega_0^2} + \dfrac{\beta}{p^2+\omega^2}$. Or
$$\begin{aligned}\frac{\alpha}{p^2+\omega_0^2} + \frac{\beta}{p^2+\omega^2} &= \frac{\alpha(p^2+\omega^2)+\beta(p^2+\omega_0^2)}{(p^2+\omega^2)(p^2+\omega_0^2)}\\ &= \frac{(\alpha+\beta)p^2+\alpha\omega^2+\beta\omega_0^2}{(p^2+\omega^2)(p^2+\omega_0^2)}\end{aligned}$$
   Par identification du polynôme présent au numérateur, on obtient le système
$$\left\{\begin{array}{lcl}\alpha+\beta &=& 0\\ \alpha\omega^2+\beta\omega_0^2 &=& \omega\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl}\alpha &=& \dfrac{\omega}{\omega^2-\omega_0^2}\\ \\ \beta &=& \dfrac{\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\end{array}\right.$$
   Et
$$\frac{\omega}{(p^2+\omega_0^2)(p^2+\omega^2)} = \frac{\omega}{\omega^2-\omega_0^2}\left(\frac{1}{p^2+\omega_0^2} - \frac{1}{p^2+\omega^2}\right)$$
   (c) D'après la question précédente, on a
$$Y(p) = \frac{1}{\omega^2-\omega_0^2}\left(\frac{\omega}{\omega_0}.\frac{\omega_0}{p^2+\omega_0^2} - \frac{\omega}{p^2+\omega^2}\right)$$
   D'où
$$y(t) = \frac{1}{\omega^2-\omega_0^2}\left(\frac{\omega}{\omega_0}.\sin(\omega_0 t) - \sin(\omega t)\right).H(t)$$
2. (a) En réduisant le membre de droite de l'égalité proposée au même dénominateur, on obtient
$$\begin{aligned}&\frac{1}{4\omega}\left(\frac{i}{\omega(p+i\,\omega)} - \frac{i}{\omega(p-i\,\omega)} - \frac{1}{(p+i\,\omega)^2} - \frac{1}{(p-i\,\omega)^2}\right)\\ =&\frac{i(p+i\omega)(p-i\omega)^2 - i(p-i\omega)(p+i\omega)^2 - \omega(p-i\omega)^2 - \omega(p+i\omega)^2}{4\omega^2(p^2+\omega^2)^2}\\ =&\frac{i(p^2+\omega^2)(p-i\omega-p-i\omega) - \omega(p^2-ip\omega-\omega^2+p^2+ip\omega-\omega^2)}{4\omega^2(p^2+\omega^2)^2}\\ =&\frac{2\omega(p^2+\omega^2)-2\omega(p^2-\omega^2)}{4\omega^2(p^2+\omega^2)^2} = \frac{\omega}{(p^2+\omega^2)^2}\end{aligned}$$
   (b) En calculant la transformée de Laplace inverse de l'expression ci-dessus, on trouve
$$\begin{aligned}y(t) &= \frac{1}{4\omega}\left(\frac{i}{\omega}e^{-i\omega t} - \frac{i}{\omega}e^{i\omega t} - t.e^{-i\omega t} - t.e^{i\omega t}\right).H(t)\\ &= \frac{1}{2\omega}\left(\frac{\sin(\omega t)}{\omega} - t\cos(\omega t)\right).H(t)\end{aligned}$$
3. Le cas $\omega = \omega_0$ correspond à une situation de résonance. On voit en particulier que, dans ce cas, l'amplitude des oscillations augmente lorsque t augmente.

⋆ ⋆
⋆