CONTRÔLE CONTINU

Séries de Fourier, transformée de Laplace

Durée : 1h30. *Calculatrices et formulaires autorisés.*

Tous les exercices sont indépendants
Il sera tenu compte de la rédaction et la présentation

Exercice 1 Soit $a \in]0, \pi[$. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, paire, 2π-périodique et qui coïncide sur $[0, \pi[$ avec la fonction qui vaut

$$\begin{cases} 0 \text{ si } 0 \leqslant x \leqslant a \\ 1 \text{ sinon.} \end{cases}$$

1. Tracer le graphe de f sur quarte périodes.
2. Calculer ses coefficients de Fourier.
3. Écrire la série de Fourier de f et en déduire l'égalité

$$\frac{\pi - 2a}{4} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(na)\cos(na)}{n} \quad \text{pour tout } a \in]0, \pi[.$$

4. En posant $a = \frac{\pi}{4}$, écrire π sous la forme d'une somme infinie dont tous les termes sont non nuls. On rappelle la formule

$$\sin(\theta)\cos(\theta) = \frac{1}{2}\sin(2\theta)$$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et soit f la fonction 2-périodique définie par

$$\forall t \in [-1, 1[, \qquad f(t) = e^{-\alpha t}$$

1. Tracer le graphe de f sur quatre périodes.
2. Montrer que la série de la série de Fourier complexe de f s'écrit

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad S_f(t) = \sinh(\alpha) \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^n}{\alpha + in\pi} e^{in\pi t}$$

(on rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$).

3. En fixant une valeur de t bien choisie, montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\alpha^2 + n^2\pi^2} = \frac{1}{2\alpha \sinh(\alpha)} \left(\cosh(\alpha) - \frac{\sinh(\alpha)}{\alpha} \right)$$

(on rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$).

4. À l'aide du développement limité de la fonction exponentielle donné ci-dessous, retrouver la valeur de la somme $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

   Rappel : $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 On considère un système entrée (ε)/sortie (σ) régit par l'équation différentielle

$$\varepsilon' + \varepsilon = \sigma''' + 2\sigma'' + 2\sigma' \qquad (\star)$$

On suppose de plus qu'à $t = 0$, les fonctions ε et σ et toutes leurs dérivées sont nulles.

1. En appliquant la transformée de Laplace à l'équation $(\star)$, exprimer la transformée de Laplace $S(p)$ du signal de sortie en fonction de la transformée de Laplace $E(p)$ du signal d'entrée.
2. On suppose désormais que le signe d'entrée ε est donné par

$$\varepsilon(t) = e^{-t}.H(t)$$

   (H étant la fonction échelon définie en entête de votre formulaire) et l'on souhaite en déduire le signal de sortie $\sigma(t)$.

   (a) Montrer que

$$S(p) = \frac{1}{p^3 + 2p^2 + 2p}$$

   (b) En factorisant le polynôme $p^3 + 2p^2 + 2p$ dans $\mathbb{C}$ montrer qu'il existe des nombres complexes α, β et γ à déterminer tels que

$$S(p) = \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{p+1-i} + \frac{\gamma}{p+1+i}$$

   (c) En déduire le signal d'entrée sous la forme d'une somme d'exponentielle (éventuellement complexes) puis sous la forme d'une somme de fonctions réelles.

   (d) Tracer sur un même graphe l'allure des deux signaux ε et σ.

⋆ ⋆
⋆

CORRECTION

Exercice 1 :

1.

C.pdf

2. La fonction f étant paire, on a $b_n = 0$ pour tout $n \geqslant 1$. D'autre part

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\cos(nt)dt \;=\; \frac{2}{\pi}\int_a^\pi \cos(nt)dt \\ &= \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{n}\sin(nt)\right]_a^\pi \qquad \text{pour } n \neq 0 \\ &= -\frac{2\sin(na)}{n\pi} \end{aligned}$$

et

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_a^\pi dt = \frac{2(\pi - a)}{\pi} = 2\left(1 - \frac{a}{\pi}\right)$$

3. D'après les calculs précédents, on a

$$S_f(t) = 1 - \frac{a}{\pi} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(na)}{n}\cos(nt)$$

4. En $t = a$, on a donc

$$1 - \frac{a}{\pi} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(na)\cos(na)}{n} = \frac{f(a^+) + f(a^-)}{2} = \frac{1}{2}$$

D'où

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(na)\cos(na)}{n} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{a}{\pi}\right) = \frac{\pi - 2a}{4}$$

5. Pour $a = \frac{\pi}{4}$, on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right)}{n} = \frac{\pi - \frac{\pi}{2}}{4} \Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

Dans la somme ci-dessus, les termes d'indice pairs sont nuls. En posant $n = 2p+1$, on a donc

$$\pi = 4\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1}$$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 :

1.
2. f étant 2-périodique, on a $T = 2$ et $\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a

$$\begin{aligned}
c_n(f) &= \frac{1}{T}\int_{[T]} f(t)e^{-in\omega t}\,dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{-(\alpha+in\pi)t}dt \\
&= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{\alpha+in\pi}e^{-(\alpha+in\pi)t}\right]_{-1}^{1} \\
&= \frac{1}{2(\alpha+in\pi)}(e^{\alpha+in\pi} - e^{-(\alpha+in\pi)}) \\
&= \frac{(-1)^n}{2(\alpha+in\pi)}(e^{\alpha} - e^{-\alpha}) \quad \text{car} \quad e^{in\pi} = e^{-in\pi} = (-1)^n \\
&= \sinh(\alpha)\frac{(-1)^n}{\alpha+in\pi} \quad \text{avec} \quad \sinh(\alpha) = \frac{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}{2}
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad S_f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{in\omega t} = \sinh(\alpha)\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^n}{\alpha+in\pi}e^{in\pi t}$$

3. Pour calculer S_α, on pose $t = 1$ dans la formule précédente :

$$S_f(1) = \sinh(\alpha)\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^n}{\alpha+in\pi}e^{in\pi} = \sinh(\alpha)\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^{2n}}{\alpha+in\pi} = \sinh(\alpha)\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\alpha+in\pi}$$

En séparant dans cette formule les cas $n = 0$, $n > 0$ et $n < 0$, on a

$$\begin{aligned}
S_f(1) &= \frac{\sinh(\alpha)}{\alpha} + \sinh(\alpha)\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\alpha+in\pi} + \frac{1}{\alpha-in\pi} \\
&= \frac{\sinh(\alpha)}{\alpha} + \sinh(\alpha)\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2+n^2\pi^2}
\end{aligned}$$

D'autre part, f étant discontinue en 1 (c.f. courbe), on a $S_f(1) = \frac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{2} = \cosh(\alpha)$. Ainsi,

$$\cosh(\alpha) = \frac{\sinh(\alpha)}{\alpha} + 2\alpha\sinh(\alpha)\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\alpha^2+n^2\pi^2} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\alpha^2+n^2\pi^2} = \frac{1}{2\alpha\sinh(\alpha)}\left(\cosh(\alpha) - \frac{\sinh(\alpha)}{\alpha}\right)$$

4. À l'aide du développement limité de la fonction exponentielle, on montre rapidement que

$$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3) \qquad \text{et} \qquad \sinh(x) = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\alpha\sinh(\alpha)}\left(\cosh(\alpha) - \frac{\sinh(\alpha)}{\alpha}\right) &= \frac{1}{2\alpha(\alpha + o(\alpha))}\left(1 + \frac{\alpha^2}{2} - 1 - \frac{\alpha^2}{6} + o(\alpha^2)\right) \\
&= \frac{1}{2(\alpha^2 + o(\alpha^2))}\left(\frac{\alpha^2}{3} + o(\alpha^2)\right) = \frac{1}{2 + o(1)}\left(\frac{1}{3} + o(1)\right) \\
&\longrightarrow_{\alpha \to 0} \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2\pi^2} = \frac{1}{6} \iff \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 :

1.

$$\begin{aligned}
(\star) &\iff \mathcal{L}(\varepsilon' + \varepsilon) = \mathcal{L}(\sigma''' + 2\sigma'' + 2\sigma') \\
&\iff pE(p) + E(p) = p^3S(p) + 2p^2S(p) + 2pS(p) \\
&\iff S(p) = \frac{p+1}{p^3 + 2p^2 + 2p}E(p)
\end{aligned}$$

2. (a) Si $\varepsilon(t) = e^{-t}.H(t)$, on a $E(p) = \dfrac{1}{p+1}$. Ainsi,

$$S(p) = \frac{p+1}{p^3 + 2p^2 + 2p}E(p) = \frac{p+1}{p^3 + 2p^2 + 2p} \times \frac{1}{p+1} = \frac{1}{p^3 + 2p^2 + 2p}$$

(b) $p^3 + 2p^2 + 2p = p(p^2 + 2p + 2)$. On obtient alors un polynôme de degré 2 dont le discriminant vaut $\Delta = 4 - 8 = -4$. Il admet donc deux racines complexes conjuguées

$$\alpha_1 = \frac{-2 - 2i}{2} = -1 - i \qquad \text{et} \qquad \alpha_2 = \overline{\alpha_1} = -1 + i$$

D'où $p^3 + 2p^2 + 2p = p(p + 1 - i)(p + 1 + i)$. $S(p)$ admet donc une décomposition en éléments simples sous la forme

$$S(p) = \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{p + 1 + i} + \frac{\gamma}{p + 1 - i} \qquad (*)$$

En multipliant l'égalité $(*)$ par p et en posant $p = 0$, on obtient

$$\frac{1}{0^2 + 2.0 + 2} = \alpha + 0 \iff \alpha = \frac{1}{2}$$

De même, en multipliant $(*)$ par $p + 1 + i$ et en posant $p = -1 - i$, on obtient

$$\beta = \frac{1}{(-1 - i)(-2i)} = -\frac{1}{2 - 2i}$$

Enfin, le dénominateur de $S(p)$ étant un polynôme à coefficients réels, on peut montrer que

$$\gamma = \overline{\beta} = -\frac{1}{2 + 2i}$$

Dans un premier temps, on gardera les notations β et γ pour la suite des calculs.

(c) Le signal $\sigma(t)$ cherché s'obtient en effectuant la transformée de Laplace inverse de la fonction $S(p)$ ci-dessus. Or

- $\frac{1}{p}$ se remonte en $H(t)$,
- $\frac{\beta}{p-e^{\frac{2i\pi}{3}}}$ se remonte en $\beta.e^{e^{\frac{2i\pi}{3}}t}.H(t) = \beta.e^{\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)t}.H(t)$,
- $\frac{\gamma}{p-e^{\frac{4i\pi}{3}}}$ se remonte en $\gamma.e^{e^{\frac{4i\pi}{3}}t}.H(t) = \gamma.e^{\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)t}.H(t)$.

D'où

$$\sigma(t) = H(t) + \beta.e^{\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)t}.H(t) + \gamma.e^{\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)t}.H(t)$$

Pour obtenir une expression de $\sigma(t)$ ne faisant intervenir aucun nombre complexe, on peut dans un premier temps noter que les deux derniers termes de la somme ci-dessus sont conjugués. Ainsi,

$$\sigma(t) = H(t).\left(1 + 2\Re\left(\beta.e^{\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)t}\right)\right)$$

Il reste donc à déterminer la partie réelle ci-dessus (qui s'exprimera en fonction des fonctions trigonométriques). Ainsi,

$$\beta = \frac{1}{e^{\frac{4i\pi}{3}} - 1} = \frac{1}{-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} - 1} = -\frac{2}{3+i\sqrt{3}} = -\frac{2(3-i\sqrt{3})}{12} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{6}$$

et

$$e^{\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)t} = e^{-\frac{t}{2}}.e^{i\frac{\sqrt{3}t}{2}} = e^{-\frac{t}{2}}\left(\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + i\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)$$

donc

$$\begin{aligned}\Re\left(\beta.e^{\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)t}\right) &= \Re\left(\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{6}\right)\left(e^{-\frac{t}{2}}\left(\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + i\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)\right)\right)\\ &= -\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}\left(\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \frac{\sqrt{3}}{3}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)\end{aligned}$$

et

$$\sigma(t) = H(t).\left(1 - e^{-\frac{t}{2}}\left(\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \frac{\sqrt{3}}{3}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)\right)$$

En superposant les signaux d'entrée et de sortie, on obtient alors le graphe suivant :

entree-sortie.pdf