CONTRÔLE CONTINU

Fonctions spéciales

Durée : 1h30. *Calculatrices autorisées*

Tous les exercices sont indépendants
Il sera tenu compte de la rédaction et la présentation

Exercice 1 Déterminer les valeurs de $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ pour lesquelles les intégrales ci-dessous convergent. On représentera les résultats obtenus dans un plan (α, β).

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha (1+t)^\beta} \qquad J = \int_0^{+\infty} \frac{(1+t)^\alpha - t^\alpha}{t^\beta} dt$$

On rappelle à toutes fins utiles le développement limité de $(1+u)^\alpha$ en 0 :

$$(1+u)^\alpha = 1 + \alpha.u + o(u)$$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 Soient a, b et λ trois réels. On souhaite faire de la fonction

$$f \ : \ t \longmapsto \lambda.e^{-\frac{(t-a)^2}{b^2}}$$

une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

Pour cela, on note

$$I_1(a,b) = \int_a^{+\infty} e^{-\frac{(t-a)^2}{b^2}} dt, \qquad I_2(a,b) = \int_{-\infty}^{a} e^{-\frac{(t-a)^2}{b^2}} dt$$

et

$$I(a,b) = I_1(a,b) + I_2(a,b) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(t-a)^2}{b^2}} dt$$

1. Montrer que l'intégrale $I_1(a,b)$ converge pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
2. À l'aide du changement de variable $u = -t$ dans $I_1(-a,b)$, montrer que $I_2(a,b) = I_1(-a,b)$.
3. En déduire le domaine de définition de I_2 puis de I.

4. En se ramenant à la fonction Γ, montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$ et pour tout $b > 0$, on a
$$I_1(a,b) = \frac{|b|\sqrt{\pi}}{2}$$
(on rappelle que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$).
5. En déduire la valeur de $I(a,b)$ puis une constante λ telle que la fonction f soit une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note
$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)dt$$

1. Calculer I_0 et I_1.
2. À l'aide du changement de variable $u = \cos t$, montrer que
$$W_n = \int_0^1 (1-u^2)^{\frac{n-1}{2}} du$$
3. À l'aide d'un second changement de variable, montrer que
$$W_n = \frac{1}{2}\text{Beta}\left(\frac{1}{2}, \frac{n+1}{2}\right)$$
4. Calculer I_2 et I_3.

⋆ ⋆
⋆

CORRECTION

Exercice 1 :

1. $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha(1+t)^\beta}$.

   — En 0 :

   $$\frac{1}{t^\alpha(1+t)^\beta} \underset{0}{\sim} \frac{1}{t^\alpha}$$

   On reconnaît ici une fonction de Riemann de paramètre α, intégrable en 0 si et seulement si $\alpha < 1$. Il en est donc de même de l'intégrabilité de la fonction étudiée en 0.

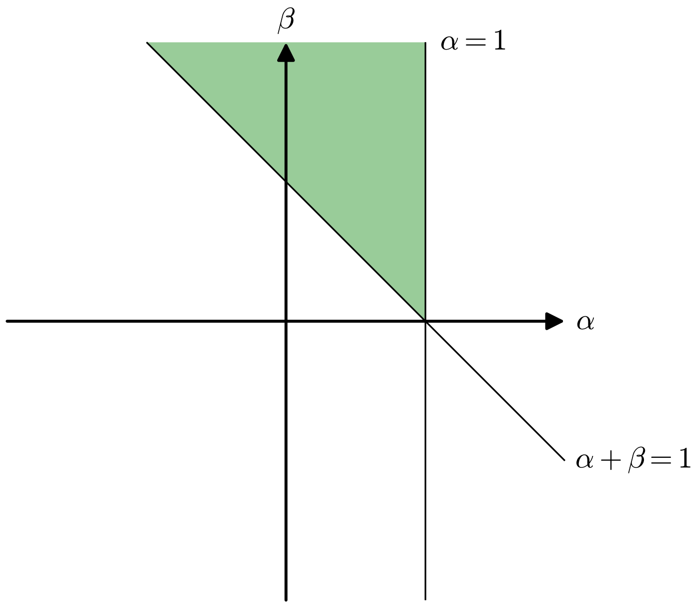
   — En $+\infty$:

   $$\frac{1}{t^\alpha(1+t)^\beta} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{\alpha+\beta}}$$

   On reconnaît ici une fonction de Riemann de paramètre $\alpha+\beta$, intégrable en $+\infty$ si et seulement si $\alpha+\beta > 1$. Il en est donc de même pour l'intégrabilité de la fonction étudiée en $+\infty$.

   D'après l'étude précédente, l'intégrale I converge si et seulement si $\begin{cases} \alpha < 1, \\ \alpha+\beta > 1 \end{cases}$.

   D'où :



2. $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(1+t)^\alpha - t^\alpha}{t^\beta} dt$.

— <u>En 0</u> :

$$\frac{(1+t)^\alpha - t^\alpha}{t^\beta} \underset{0}{\sim} \frac{1}{t^\beta}$$

On reconnaît ici une fonction de Riemann de paramètre β, intégrable en 0 si et seulement si $\beta < 1$. Il en est donc de même de l'intégrabilité de la fonction étudiée en 0.

— <u>En $+\infty$</u> : Pour déterminer un équivalent de la fonction à intégrer en $+\infty$, il faut appliquée la formule rappelée. Pour cela, on commence par factoriser le numérateur par t^α :

$$(1+t)^\alpha - t^\alpha = t^\alpha \left(\left(\frac{1}{t^\alpha} + 1 \right)^\alpha - 1 \right)$$

En $+\infty$, $t \to 0$. On peut alors appliquer la formule donnée avec $u = \frac{1}{t}$:

$$(1+t)^\alpha - t^\alpha = t^\alpha \left(\cancel{1} + \frac{\alpha}{t} + o\left(\frac{1}{t}\right) - \cancel{1} \right) \underset{+\infty}{\sim} \alpha . t^{\alpha - 1}$$

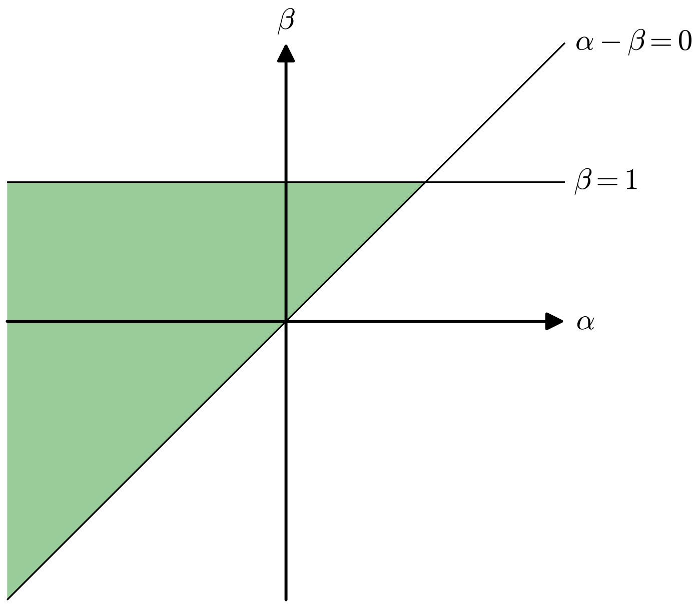
D'où

$$\frac{(1+t)^\alpha - t^\alpha}{t^\beta} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\alpha}{t^{1-\alpha+\beta}}$$

On reconnaît ici une fonction de Riemann de paramètre $1 - \alpha + \beta$, intégrable en $+\infty$ si et seulement si $1 - \alpha + \beta > 1$, i.e. si et seulement si $\alpha - \beta < 0$. Il en est donc de même pour l'intégrabilité de la fonction étudiée en $+\infty$.

D'après l'étude précédente, l'intégrale J converge si et seulement si $\left\{ \begin{array}{r} \beta < 1, \\ \alpha - \beta < 0 \end{array} \right.$.

D'où :



⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 :

1. La fonction $t \mapsto e^{-\frac{(t-a)^2}{b^2}}$ est définie sur $[a, +\infty[$. Seule la convergence en $+\infty$ est à étudier. Or on reconnaît dans la fonction ci-dessus une exponentielle. On peut donc la comparer à la fonction $t \mapsto e^{-t}$:

$$\frac{e^{-\frac{(t-a)^2}{b^2}}}{e^{-t}} = e^{\frac{1}{b^2}\left(-t^2+(2a+b^2)t-a^2\right)} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$$

quelque soient a et b dans $\mathbb{R}$. Donc $e^{-\frac{(t-a)^2}{b^2}} = o(e^{-t})$ à l'infini et par domination, la fonction $t \mapsto e^{-\frac{(t-a)^2}{b^2}}$ est intégrable sur $[a, +\infty[$.

2. Soients $a, b \in \mathbb{R}$ fixés.

$$\begin{aligned} I_1(-a,b) &= \int_{-a}^{+\infty} e^{-\frac{(t+a)^2}{b^2}} dt \underset{\substack{u=-t \\ du=-dt}}{=} \int_{a}^{-\infty} e^{-\frac{(-u+a)^2}{b^2}} (-du) \\ &= \int_{-\infty}^{a} e^{-\frac{(u-a)^2}{b^2}} du = I_2(a,b) \end{aligned}$$

3. $I_1(-a,b)$ étant définie pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, il en est de même pour $I_2(a,b)$. Autrement dit, les intégrales $I_1(a,b)$ et $I_2(a,b)$ sont définies pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Puisque $I = I_1 + I_2$, il en est de même pour I.

4. Pour retrouver la fonction Γ, on pose $u = \dfrac{(t-a)^2}{b^2}$. On a alors $t = |b|\sqrt{u} + a$ et $dt = \dfrac{|b|}{2\sqrt{u}} du$. D'où

$$\begin{aligned} I_1(a,b) &= \int_0^{+\infty} e^{-u}.\frac{|b|}{2\sqrt{u}} du = \frac{|b|}{2} \int_0^{+\infty} u^{-\frac{1}{2}} e^{-u} du \\ &= \frac{|b|}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{|b|\sqrt{\pi}}{2} \end{aligned}$$

5. D'après les questions précédentes, on a

$$I_2(a,b) = I_1(-a,b) = \frac{|b|\sqrt{\pi}}{2}$$

et

$$I(a,b) = I_1(a,b) + I_2(a,b) = |b|\sqrt{\pi}$$

La fonction $f\ :\ t \longmapsto \lambda.e^{-\frac{(t-a)^2}{b^2}}$ est une densité de probabilités si et seulement si $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(t)dt = 1$. Or

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)dt = \lambda.I(a,b) = \lambda.|b|\sqrt{\pi}$$

f est donc une densité de probabilités si et seulement si $\boxed{\lambda = \dfrac{1}{|b|\sqrt{\pi}}}$.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 :

1. $I_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt = [-\cos t]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$
2. En posant $u = \cos t$, on a $du = -\sin t dt$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{n-1}.\sin t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 t)^{\frac{n-1}{2}}.\sin t dt = \int_1^0 (1-u^2)^{\frac{n-1}{2}}(-du)$$

   On retrouve l'intégrale voulue en inversant les bornes de l'intégrale ci-dessus.
3. Pour obtenir la formule voulue, on effectue le changement de variable $x = u^2$ dans la dernière intégrale obtenue.
4.

$$I_2 = \frac{1}{2}\text{Beta}\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{2\Gamma(2)} = \frac{\pi}{4}$$

$$I_3 = \frac{1}{2}\text{Beta}\left(\frac{1}{2}, 2\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(2)}{2\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} = \frac{2}{3}$$

⋆ ⋆
⋆