CONTRÔLE CONTINU

Géométrie plane.

Tous les exercices sont indépendants. *Calculatrices autorisées*
Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation.

Exercice 1 Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R}$, on note D la droite d'équation

$$D \ : \ ax + by + c = 0$$

a, b, c étant trois réels fixés tels que $(a, b) \neq (0, 0)$.

On note par ailleurs Δ l'ensemble des points du plan dont les coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$ vérifient l'équation

$$\Delta \ : \ (ax + by)^2 - 3(bx - ay)^2 = 0$$

1. (a) Donner sans calcul un vecteur $\overrightarrow{n}$ normal à D.
   (b) Déterminer un vecteur directeur unitaire $\overrightarrow{u}$ de D (on pourra commencer par chercher un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{n}$).

2. Montrer que l'ensemble Δ est constitué de deux droites D_1 et D_2 respectivement dirigées par les vecteurs

$$\overrightarrow{u_1} = \begin{pmatrix} -b - a\sqrt{3} \\ a - b\sqrt{3} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{u_2} = \begin{pmatrix} -b + a\sqrt{3} \\ a + b\sqrt{3} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$$

3. Montrer que les droites D, D_1 et D_2 sont deux à deux concourantes.
4. Calculer $\cos(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u_1}})$ et $\cos(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u_2}})$.
5. Que dire du triangle formé par les trois droites D, D_1 et D_2 ?

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R}$, on note

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} \qquad \overrightarrow{u_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} \qquad \overrightarrow{u_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$$

et pour $i = 1, 2$, l'on note D_i la droite dirigée par $\overrightarrow{u_i}$ et passant par A_i.

1. Montrer que les droites D_1 et D_2 sont sécantes.
2. Donner une équation cartésienne de la droite D_1.
3. Donner une représentation paramétrique de D_2.
4. Déterminer les coordonnées dans $\mathcal{R}$ du point d'intersection $D_1 \cap D_2$.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

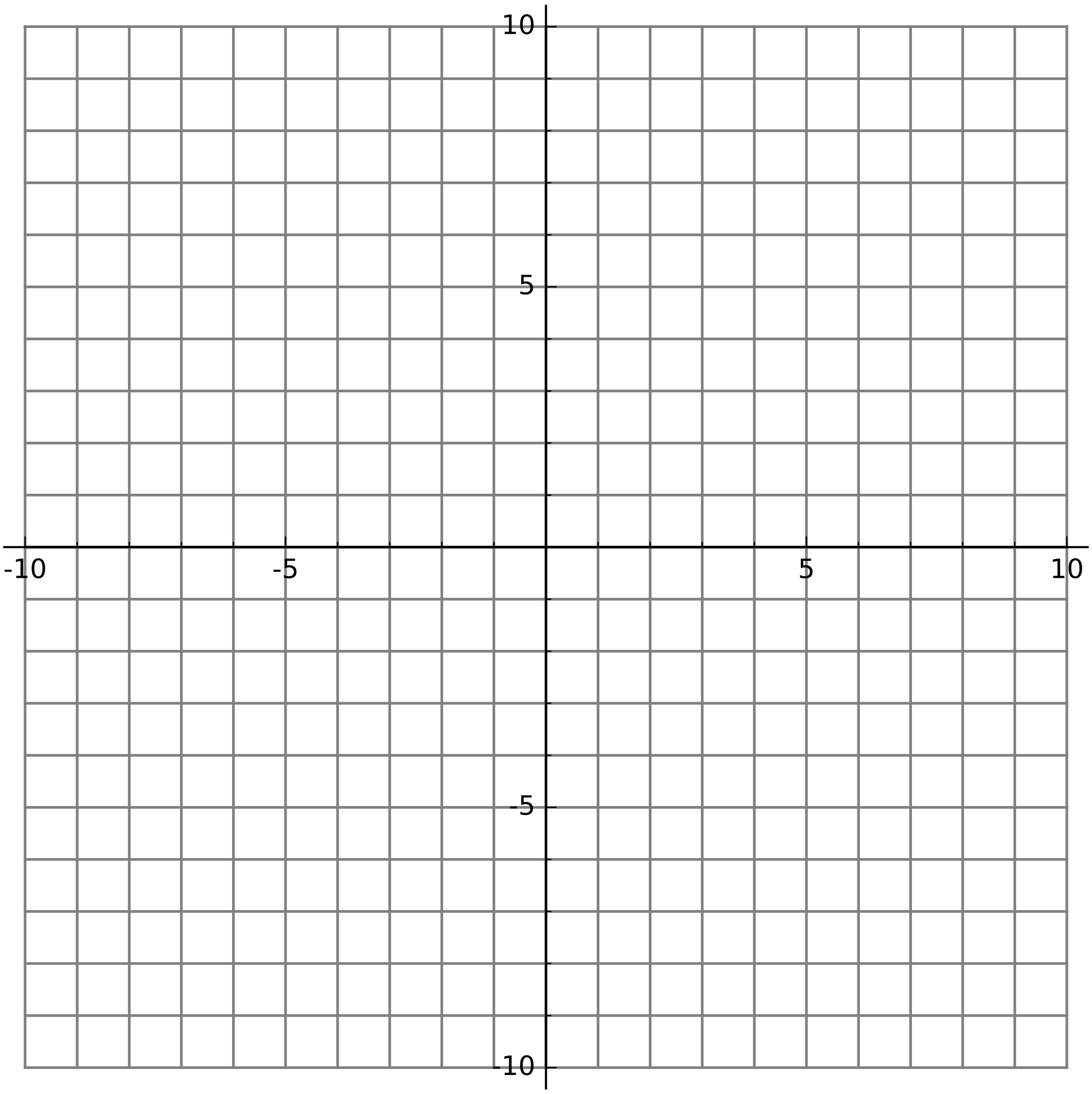
Exercice 3 Dans le plan muni d'un repère $\mathcal{R}$ orthonormé, on note

$$D_1 \;:\; 5x - 12y + 4 = 0 \qquad \text{et} \qquad D_2 \;:\; 4x - 3y - 10 = 0$$

1. Déterminer le point d'intersection $D_1 \cap D2$ et tracer les droites D_1 et D_2 dans le repère ci-joint.
2. Soit $M = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$ un point du plan. Exprimer en fonction de x et y les distances $d(M, D_1)$ et $d(M, D_2)$.
3. Montrer que l'ensemble des points M qui vérifient $d(M, D_1) = d(M, D_2)$ est la réunion de deux droites dont on précisera des équations cartésiennes (on rappelle que $|X| = |Y|$ si et seulement si $X = Y$ ou $X = -Y$) et les tracer dans le repère ci-joint.
4. Soit $A = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$.
   (a) Déterminer le rayon R_0 du cercle $\mathcal{C}_0$ de centre A, tangent à la droite D_1 et le tracer dans le repère ci-joint.
   (b) Montrer $\mathcal{C}_0$ est aussi tangent à D_2.

⋆ ⋆
⋆

NOM : .... Prénom : ....



CORRECTION

Exercice 1 :

1. (a) Un vecteur normal à D est donné par les coefficients de x et y dans l'une de ses équations cartésiennes. Ainsi,
$$\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

   (b) Un vecteur directeur de D est un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{n}$. Ses coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ doivent donc vérifier l'équation
$$ax + by = 0$$
   On peut alors fixer a et en déduire b. On note en particulier que le vecteur $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ répond au critère d'orthogonalité. Pour obtenir un vecteur normé, il suffit alors de le diviser par sa note :
$$\overrightarrow{u} = \frac{\overrightarrow{v}}{||\overrightarrow{v}||} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$$

2. En notant l'identité remarquable $A^2 - B^2$, on peut factoriser l'équation de Δ :
$$\begin{aligned}
(ax+by)^2 - 3(bx-ay)^2 = 0 &\Leftrightarrow \left(ax+by-\sqrt{3}(bx-ay)\right)\left(ax+by+\sqrt{3}(bx-ay)\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \left((a-b\sqrt{3})x+(b+a\sqrt{3})y\right)\left((a+b\sqrt{3})x+(b-a\sqrt{3})y\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} (a-b\sqrt{3})x+(b+a\sqrt{3})y &=& 0 \\ \text{ou} && \\ (a+b\sqrt{3})x+(b-a\sqrt{3})y &=& 0 \end{array}\right.
\end{aligned}$$
   On reconnaît ici deux équations de droites D_1 et D_2 dont on peut extraire des vecteurs normaux :
$$\overrightarrow{n_1} = \begin{pmatrix} a-b\sqrt{3} \\ b+a\sqrt{3} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{n_2} = \begin{pmatrix} a+b\sqrt{3} \\ b-a\sqrt{3} \end{pmatrix}$$
   On constate alors que les deux vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ sont respectivement orthogonaux à $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$. Ils dirigent donc bien les droites D_1 et D_2.

3. Deux droites sont concourante si elles ne sont pas parallèles. Or on peut vérifier que les vecteurs directeurs des droites D, D_1 et D_2 ne sont pas deux à deux colinéaires. Les droites sont donc sécantes deux à deux.

4.
$$
\begin{aligned}
\cos(\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{u_1}}) &= \frac{\langle \overrightarrow{u},\overrightarrow{u_1}\rangle}{||\overrightarrow{u}||.||\overrightarrow{u_1}||} = \frac{1}{||\overrightarrow{u_1}||}\left\langle \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -b-a\sqrt{3} \\ a-b\sqrt{3} \end{pmatrix}\right\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\frac{1}{\sqrt{(-b-a\sqrt{3})^2+(a-b\sqrt{3})^2}}\Big(-b(-b-a\sqrt{3})+a(a-b\sqrt{3})\Big) \\
&= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\frac{1}{\sqrt{b^2+\cancel{2ab\sqrt{3}}+3a^2+a^2-\cancel{2ab\sqrt{3}}+3b^2}}(b^2+\cancel{ab\sqrt{3}}+a^2-\cancel{ab\sqrt{3}}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\frac{a^2+b^2}{\sqrt{4a^2+4b^2}} = \frac{1}{2}.\frac{\cancel{a^2+b^2}}{\cancel{\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2}} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

De même
$$
\begin{aligned}
\cos(\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{u_2}}) &= \frac{\langle \overrightarrow{u},\overrightarrow{u_2}\rangle}{||\overrightarrow{u}||.||\overrightarrow{u_2}||} = \frac{1}{||\overrightarrow{u_2}||}\left\langle \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -b+a\sqrt{3} \\ a+b\sqrt{3} \end{pmatrix}\right\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\frac{1}{\sqrt{(-b+a\sqrt{3})^2+(a+b\sqrt{3})^2}}\Big(-b(-b+a\sqrt{3})+a(a+b\sqrt{3})\Big) \\
&= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\frac{1}{\sqrt{b^2-\cancel{2ab\sqrt{3}}+3a^2+a^2+\cancel{2ab\sqrt{3}}+3b^2}}(b^2-\cancel{ab\sqrt{3}}+a^2+\cancel{ab\sqrt{3}}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\frac{a^2+b^2}{\sqrt{4a^2+4b^2}} = \frac{1}{2}.\frac{\cancel{a^2+b^2}}{\cancel{\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2}} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

5. D'après le calcul ci-dessus, les angles entre les droites D, D_1 et D_2 sont de mesure $\pm\frac{\pi}{3}$. Le triangle ainsi formé est donc équilatéral.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 :

1. Les droites D_1 et D_2 sont sécantes si et seulement si elles ne sont pas parallèles. Il faut et il suffit donc que leurs vecteurs directeurs ne soient pas colinéaires. C'est le cas si $\det(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2})$ est non nul. Or

$$\det(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}) = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = (-2).3 - 1.(-1) = -5 \neq 0 \tag{1}$$

Dont D_1 et D_2 sont sécantes.

2. La droite D_1 rassemble l'ensemble des points $M = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$ tels que $\overrightarrow{A_1M}$ et $\overrightarrow{u_1}$ soient colinéaires, i.e. tels que $\det(\overrightarrow{A_1M}, \overrightarrow{u_1}) = 0$. Or

$$\begin{aligned}
\det(\overrightarrow{A_1M}, \overrightarrow{u_1}) = 0 \;&\Leftrightarrow\; \begin{vmatrix} x+1 & 2 \\ y-2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \\
&\Leftrightarrow\; (-1).(x+1) - 2.(y-2) = 0 \\
&\Leftrightarrow\; x + 1 + 2y - 4 = 0 \\
&\Leftrightarrow\; \boxed{x + 2y = 3} \qquad \text{équation de } D_1
\end{aligned}$$

3. Les points de la droite D_2 sont les points $M = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$ tels que les vecteurs $\overrightarrow{A_2M}$ et $\overrightarrow{u_2}$ soient colinéaires, i.e. les points M pour lesquels il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{A_2M} = t\overrightarrow{u_2}$. Or

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{A_2M} = t\overrightarrow{u_2} \;&\Leftrightarrow\; \begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \end{pmatrix} = t.\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow\; \left\{ \begin{array}{rcl} x-2 &=& t \\ y-1 &=& 3t \end{array} \right. \\
&\Leftrightarrow\; \boxed{\left\{ \begin{array}{rcl} x &=& 2+t \\ y &=& 1+3t \end{array} \right.} \qquad \text{représentation paramétrique de } D_2
\end{aligned}$$

4. Le point $M_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ d'intersection de D_1 et D_2 doit, par définition, appartenir à la fois à D_1 et à D_2. Le couple (x_0, y_0) doit donc vérifier

$$(E_1) \,:\, x_0 + 2y_0 = 1$$

et

$$(P_2) \,:\, \left\{ \begin{array}{rcl} x_0 &=& 2+t \\ y_0 &=& 1+3t \end{array} \right.$$

pour un $t \in \mathbb{R}$.
En injectant dans (E_1) les expressions de x_0 et y_0 donnée par (P_2), on obtient

$$(E_1) + (P_2) \iff 2 + t + 2(1+3t) = 1 \iff 7t = -3 \iff t = -\frac{3}{7}$$

En injectant cette valeur de t dans les équations de (P_2), on obtient les coordonnées de M_0 :

$$\left\{ \begin{array}{rcccl} x_0 &=& 2 - \frac{3}{7} &=& \frac{11}{7} \\ y_0 &=& 1 - 3.\frac{3}{7} &=& -\frac{2}{7} \end{array} \right.$$

D'où $M_0 = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 11 \\ -2 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 :

1. Le point d'intersection de D_1 et D_2 est le point du plan dont les coordonnées dans $\mathcal{R}$ vérifient le système formé par les équations respectives de D_1 et D_2 :

$$(S)\ :\ \left\{\begin{array}{lcl} 5x-12y+4 & = & 0 \\ 4x-3y-10 & = & 0 \end{array}\right. \underset{L_1 \leftarrow L_1-4L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{lcl} -11x+44 & = & 0 \\ 4x-3y-10 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{lclcl} x & = & 4 & & \\ y & = & \frac{1}{3}(4x-10) & = & 2 \end{array}\right.$$

D'où $D_1 \cap D_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} \right\}$.

2.
$$d(M, D_1) = \frac{|5x-12y+4|}{\sqrt{5^2+(-12)^2}} = \frac{|5x-12y+4|}{13}$$

et

$$d(M, D_2) = \frac{|4x-3y-10|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} = \frac{|4x-3y-10|}{5}$$

3. Un point $M = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$ vérifie $d(M, D_1) = d(M, D_2)$ si et seulement si

$$\frac{|5x-12y+4|}{13} = \frac{|4x-3y-10|}{5} \Longleftrightarrow 5.|5x-12y+4| = 13.|4x-3y-10|$$
$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} 25x-60y+20 & = & 52x-39y-130 \\ \text{ou} & & \\ 25x-60y+20 & = & -52x+39y+130 \end{array}\right.$$

Or

$$25x-60y+20 = 52x-39y-130 \Leftrightarrow 27x+21y = 150 \Leftrightarrow \boxed{9x+7y=50}$$

et

$$25x-60y+20 = -52x+39y+130 \Leftrightarrow 77x-99y = 110 \Leftrightarrow \boxed{7x-9y=10}$$

Les points équidistants de D_1 et D_2 sont donc rassemblés sur les deux droites

$$D_3\ :\ 9x+7y=50 \qquad \text{et} \qquad D_4\ :\ 7x-9y=10$$

4. (a) Le rayon du cercle cherché est donné par la distance de A à D_1. Or

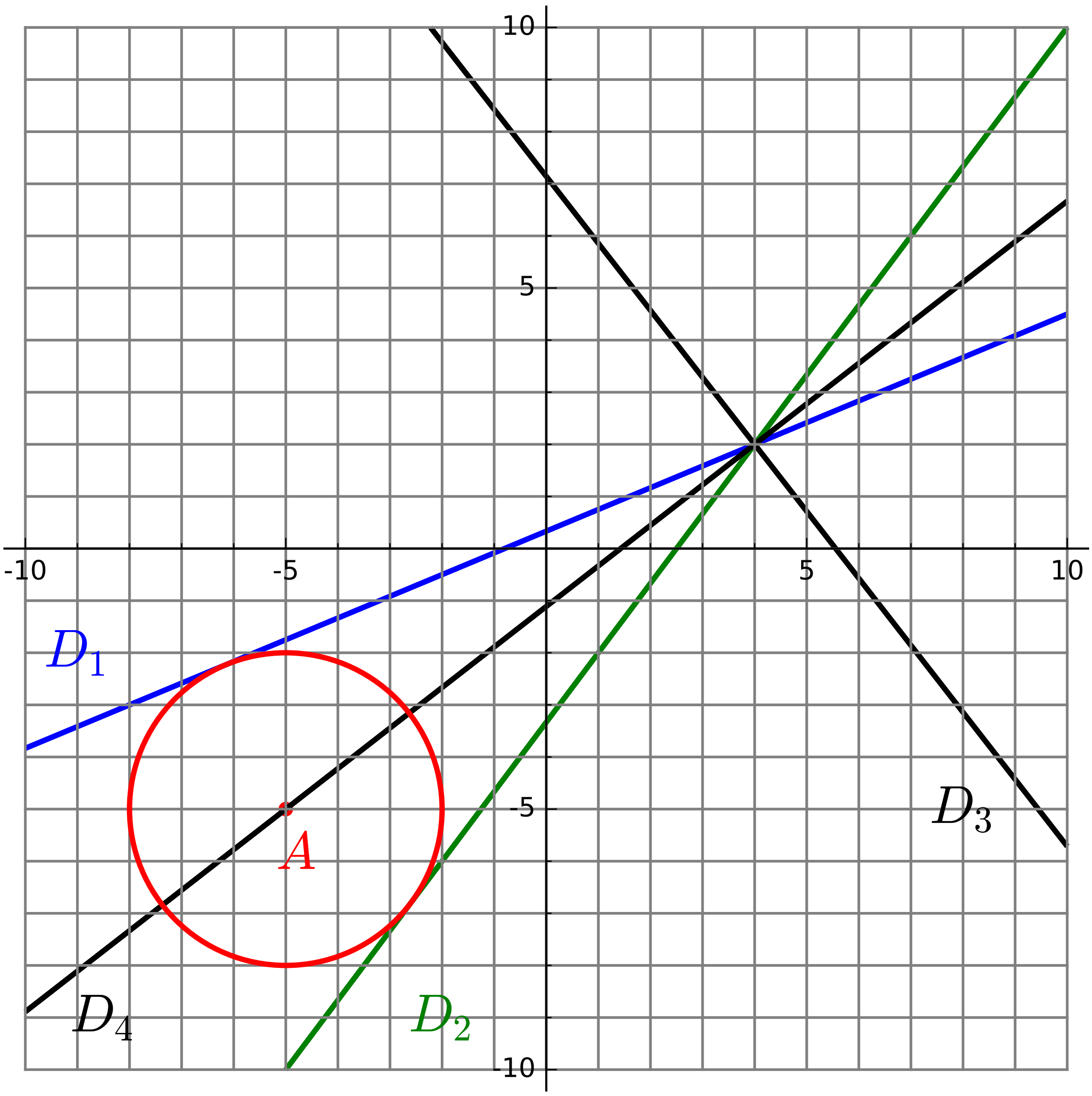
$$d(A, D_1) = \frac{|5x_A-12y_A+4|}{13} = \frac{|5.(-5)-12.(-5)+4|}{13}$$
$$= \frac{-25+60+4}{13} = \frac{39}{13} = 3$$

D'où $R_0 = 3$.

(b) Le cercle C_0 est également tangent à D_2 si et seulement si $d(A, D_2) = R_0$. Or

$$\begin{aligned} d(A, D_2) &= \frac{|4x_A - 3y_A - 10|}{5} = \frac{|4.(-5) - 3.(-5) - 10|}{5} \\ &= \frac{|-20 + 15 - 10|}{5} = \frac{15}{5} = 3 = R_0 \end{aligned}$$

Graphiquement, on obtient le dessin suivant :



⋆ ⋆
⋆