CONTRÔLE CONTINU

Compléments d'intégration

Durée : 1h30. *Calculatrices autorisées.*

Tous les exercices sont indépendants
Il sera tenu compte de la rédaction et la présentation

Exercice 1 Soit $R > 0$. Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(\mathcal{O}xyz)$, on considère le solide Σ constitué

— de la demi-sphère de rayon R définie par

$$\mathcal{S}_R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R, \quad -R \leqslant z \leqslant 0\}$$

— le cylindre de rayon R et de hauteur R défini par

$$\mathcal{C}_R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x^2 + y^2 \leqslant R^2, \quad 0 \leqslant z \leqslant R\}$$

On suppose en outre ce volume non homogène, sa distribution de masse étant donnée par la fonction

$$\mu \ : \ (x, y, z) \longmapsto z^2$$

1. Déterminer la masse totale du solide Σ.
2. Déterminer les coordonnées du centre de gravité $G = (x_G, y_G, z_G)$ de Σ.
3. Discuter de la position de G par rapport à Σ, par rapport à $\mathcal{S}_R$, par rapport à $\mathcal{C}_R$.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 Dans le plan, muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (x\mathcal{O}y)$, on note D le domaine délimité par les courbes d'équations

$$\mathcal{C}_1 \ : \ x = \frac{y^2}{4} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{C}_2 \ : \ y = 2x$$

On considère en outre les deux champs de vecteurs suivants :

$$\Phi \ : \ (x, y) \longmapsto (0, xy), \quad \Psi \ : \ (x, y) \longmapsto (xy, 0)$$

1. Dessiner le domaine D. On précisera en particulier les coordonnées des points d'intersections des courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.
2. À l'aide d'une intégrale curviligne, déterminer le flux du champ de vecteurs Φ sortant de D à travers sa frontière ∂D.

   Ind. : à l'aide de la relation de Chasles, on pourra décomposer cette intégrale curviligne en deux intégrales curvilignes distinctes.
3. Calculer de même le flux du champ de vecteurs Ψ sortant de D à travers ∂D.
4. Sans calcul supplémentaire, donner les coordonnées du centre de gravité G de D.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 Le bâtiment ci-dessous est couvert d'une toiture en selle de cheval d'équation

$$z = axy + h$$

au dessus d'un carré de coté 2 unités (u). La surface est placée au dessus de carré de sorte que le point critique de la surface soit au dessus du centre du carré à une hauteur de $\frac{2}{3}u$.

Toit de la gare d'Ochota (Varsovie)

http ://fr.wikipedia.org/wiki/Parabolo%C3%AFde#mediaviewer/Fichier :W-wa_Ochota_PKP-WKD.jpg

1. Déterminer a et h sachant que le coin du premier plan est au niveau du sol.
2. Déterminer la surface de ce toit.
3. Déterminer le volume couvert par ce toit.

⋆ ⋆
⋆

CORRECTION

Exercice 1 :

1. Par définition, la masse totale du solide Σ est

$$M_\Sigma = \iiint_\Sigma \mu(x,y,z)dV$$

et d'après la relation de Chasles, on a

$$M_\Sigma = \underbrace{\iiint_{\mathcal{S}_R} \mu(x,y,z)dxdydz}_{I_1} + \underbrace{\iiint_{\mathcal{C}_R} \mu(x,y,z)dxdydz}_{I_2}$$

— **Calcul de** I_1 : pour intégrer sur la demi-sphère, on utilise les coordonnées sphériques (r,θ,φ). On a alors

— $\mathcal{S}_R = \left\{(r,\theta,\varphi) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 0 \leqslant r \leqslant R, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \quad \frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \pi\right\}$

— $dV = r^2 \sin\varphi dr d\theta d\varphi$

— $\mu(x,y,z) = z^2 = r^2\cos^2(\varphi)$

D'où

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{r=0}^{R}\left(\int_{\theta=0}^{2\pi}\left(\int_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{\pi} r^2\cos^2(\varphi).r^2\sin\varphi d\varphi\right)d\theta\right)dr \\
&= \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^R r^4 dr\right)\left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin\varphi\cos^2(\varphi)d\varphi\right) \\
&= 2\pi.\frac{R^5}{5}.\left[-\frac{1}{3}\cos^3(\varphi)\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\
I_1 &= \frac{2\pi R^5}{15}
\end{aligned}$$

— **Calcul de** I_2 : pour intégrer sur le cylindre $\mathcal{C}_R$, on utilise les coordonnées cylindriques (r,θ,z). On a alors

— $\mathcal{C}_R = \{(r,\theta,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 0 \leqslant r \leqslant R, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \quad 0 \leqslant z \leqslant R\}$

— $dV = r dr d\theta dz$

— $\mu(x,y,z) = z^2$

D'où

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_{r=0}^{R} \left(\int_{\theta=0}^{2\pi} \left(\int_{z=0}^{R} r z^2 dz \right) d\theta \right) dr \\
&= \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_0^R r dr \right) \left(\int_0^R z^2 dz \right) \\
&= 2\pi . \frac{R^2}{2} . \frac{R^3}{3} \\
I_2 &= \frac{\pi R^5}{3}
\end{aligned}$$

Donc

$$M_\Sigma = I_1 + I_2 = \frac{2\pi R^5}{15} + \frac{\pi R^5}{3} = \frac{7\pi R^5}{15}$$

2. Par symétrie, le centre de gravité $G = (x_G, y_G, z_G)$ de Σ est situé sur l'axe $(\mathcal{O}z)$. Donc $x_G = y_G = 0$.
   D'autre part, on a

$$z_G = \frac{1}{M_\Sigma} . \iiint_\Sigma z.\mu(x,y,z) dV = \frac{1}{M_\Sigma} . \iiint_\Sigma z^3 dV$$

   Là encore, on découpe l'intégrale triple ci-dessus en deux intégrales, l'une sur la demi-sphère $\mathcal{S}_R$, l'autre sur le cylindre $\mathcal{C}_R$. En utilisant dans chaque cas les coordonnées spécifiques à la géométrie étudiée, on obtient :

$$\begin{aligned}
\iiint_\Sigma z.\mu(x,y,z) dV &= \int_{r=0}^{R} \left(\int_{\theta=0}^{2\pi} \left(\int_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{\pi} r^5 \cos^3(\varphi) \sin\varphi d\varphi \right) d\theta \right) dr \\
&\quad + \int_{r=0}^{R} \left(\int_{\theta=0}^{2\pi} \left(\int_{z=0}^{R} r z^3 dz \right) d\theta \right) dr \\
&= 2\pi . \frac{R^6}{6} \left[-\frac{1}{4} \cos^4(\varphi) \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + 2\pi . \frac{R^2}{2} . \frac{R^4}{4} \\
&= \frac{\pi R^6}{4} - \frac{\pi R^6}{12} = \frac{\pi R^6}{6}
\end{aligned}$$

   et

$$z_G = \frac{\cancel{15}\ 5}{7\cancel{\pi R^5}} . \frac{\cancel{\pi R^6}}{\cancel{6}\ 2} = \frac{5R}{14}$$

   En conclusion, on a

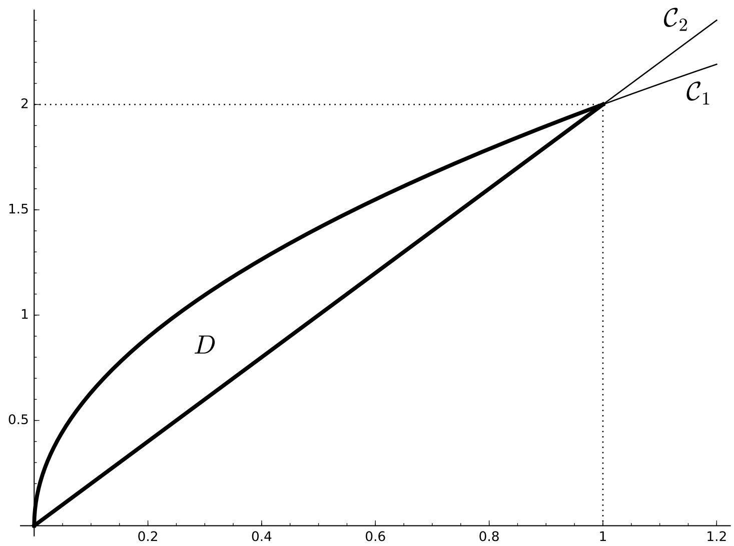
$$G = \left(0, 0, \frac{5R}{14} \right)$$

3. Puisque $0 < z_G < R$, ce centre de gravité est situé à l'intérieur du cylindre $\mathcal{C}_R$.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 :

1.



Les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont les solutions du système

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & \dfrac{y^2}{4} \\ \\ y & = & 2x \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} y & = & 2x \\ x & = & x^2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} x=1 \\ y=2 \end{array}\right.$$

2. Pour calculer le flux du champ de vecteurs Φ sortant de D, on décompose la frontière ∂D en deux morceaux en s'appuyant sur les deux courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$:

$$\partial D = \partial D_1 \cup \partial D_2$$

Le flux de Φ à travers ∂D est alors

$$\varphi = \int_{\partial D} \Phi(M)\cdot\overrightarrow{dn} = \underbrace{\int_{\partial D_1} \Phi(M)\cdot\overrightarrow{dn_1}}_{\varphi_1} + \underbrace{\int_{\partial D_2} \Phi(M)\cdot\overrightarrow{dn_2}}_{\varphi_2}$$

— **Calcul de** φ_1 : pour calculer le flux φ_1, on doit s'appuyer sur une paramétrisation du chemin ∂D_1. Or celui-ci correspond à la partie de la courbe d'équation $x = \frac{y^2}{4}$ située au dessus de l'intervalle d'ordonnées $[0,2]$. D'où la paramétrisation

$$\begin{array}{rcccc} \Gamma_1 & : & [0,2] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & & t & \longmapsto & \left\{\begin{array}{rcl} x_1(t) & = & \frac{t^2}{4} \\ y_1(t) & = & t \end{array}\right. \end{array}$$

Cette paramétrisation induit un sens de parcours du chemin ∂D_1, de sorte que

$$\overrightarrow{d\ell_1} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{dn_1} = \begin{pmatrix} -dy \\ dx \end{pmatrix}$$

En introduisant la paramétrisation Γ_1, on a alors

$$\Phi(x_1(t), y_1(t)) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{t^3}{4} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{dn_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{t}{2} \end{pmatrix} dt$$

et

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \int_0^2 \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{t^3}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{t}{2} \end{pmatrix} dt = \int_0^2 \frac{t^4}{8} dt \\ &= \frac{1}{8} \left[\frac{t^5}{5} \right]_0^2 = \frac{4}{5} \end{aligned}$$

— **Calcul de φ_2** : pour calculer le flux φ_2, on doit s'appuyer sur une paramétrisation du chemin ∂D_2. Or celui-ci correspond à la partie de la droite d'équation $y = 2x4$ située au dessus de l'intervalle d'abscisses $[0, 1]$. D'où la paramétrisation

$$\begin{array}{rcccl} \Gamma_2 & : & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & & t & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{rcl} x_2(t) & = & t \\ y_2(t) & = & 2t \end{array} \right. \end{array}$$

Cette paramétrisation induit un sens de parcours du chemin ∂D_2, de sorte que

$$\overrightarrow{d\ell_2} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{dn_2} = \begin{pmatrix} dy \\ -dx \end{pmatrix}$$

En introduisant la paramétrisation Γ_2, on a alors

$$\Phi(x_2(t), y_2(t)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2t^2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{dn_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} dt$$

et

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ 2t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} dt = - \int_0^1 2t^2 dt \\ &= -2 \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^1 = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Le flux total de Φ sortant de D est alors

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{4}{5} - \frac{2}{3} = \frac{2}{15}$$

3. On décompose de même le plus ψ du champ de vecteurs Ψ en deux flux distincts $\psi = \psi_1 + \psi_2$.

   Les calculs sont alors analogues à ceux de la question précédente, le champ Φ étant remplacé par le champ Ψ. Ainsi,

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \int_{\partial D_1} \Psi(x,y) \cdot \overrightarrow{dn_1} = \int_0^2 \begin{pmatrix} \frac{t^3}{4} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{t}{2} \end{pmatrix} dt \\ &= -\int_0^2 \frac{t^3}{4} dt = -\frac{1}{4}\left[\frac{t^4}{4}\right]_0^2 = -1\end{aligned}$$

   et

$$\begin{aligned}\psi_2 &= \int_{\partial D_2} \Psi(x,y) \cdot \overrightarrow{dn_2} = \int_0^1 \begin{pmatrix} 2t^2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^1 4t^2 dt = 4\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{4}{3}\end{aligned}$$

   D'où

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = -1 + \frac{4}{3} = \frac{1}{3}$$

4. Les coordonnées cartésiennes du point G sont données par les intégrales doubles suivantes :

$$x_G = \frac{1}{\mathcal{A}(D)} \iint_D x dS \qquad \text{et} \qquad y_G = \frac{1}{\mathcal{A}(D)} \iint_D y dS$$

   Or les champs de vecteurs Φ et Ψ vérifient

$$\mathrm{div}\Phi(x,y) = x \qquad \text{et} \qquad \mathrm{div}\Psi(x,y) = y$$

   D'après la formule de Green, on a donc

$$\iint_D x dS = \iint_D \mathrm{div}\Phi(x,y) dS = \varphi = \frac{2}{15}$$

   et

$$\iint_D y dS = \iint_D \mathrm{div}\Psi(x,y) dS = \psi = \frac{1}{3}$$

   Pour obtenir les coordonnées x_G et y_G, il reste donc à calculer l'aire de D. D peut être vu comme la partie du plan $(x\mathcal{O}y)$ située sous la courbe de la fonction $[x \mapsto 2\sqrt{x}]$ au dessus de l'intervalle $[0,1]$, à laquelle on a retiré le triangle situé sous la droite d'équation $y = 2x$ (dont l'aire vaut 1). Ainsi,

$$\mathcal{A}(D) = \int_0^1 2\sqrt{x} dx - 1 = 2\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1 - 1 = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$$

et

$$x_G = 3 \times \frac{2}{15} = \frac{2}{5} \qquad\qquad y_G = 3 \times \frac{1}{3} = 1$$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 :

1. On fixe un repère de l'espace de sorte que la surface étudiée soit au dessus du carré $[-1,1]^2$. De ce fait, le point critique de cette surface est situé au dessus du centre du repère. On a donc une première équation :

$$\frac{2}{3} = a.0^2 + h$$

D'où $h = \frac{2}{3}$.
D'autre part, le coin au premier plan peut alors être vu comme le point de la surface au dessus du point $(1,1)$. On a donc une seconde équation :

$$0 = a.1^2 + h$$

D'où $a = -h = -\frac{2}{3}$. L'équation de la surface étudiée est alors

$$z = \frac{2}{3}(1 - xy)$$

2. Pour calculer l'aire de la surface étudiée, on doit s'appuyer sur une paramétrisation de cette dernière. Étant la surface associée à la fonction $f : (x,y) \mapsto \frac{2}{3}(1-xy)$, on a la paramétrisation suivante :

$$\begin{array}{cccc} G & : & [-1,1]^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & & (u,v) & \longmapsto & \big(u, v, \frac{2}{3}(1-uv)\big) \end{array}$$

On a alors

$$\frac{\partial G}{\partial u}(u,v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{2}{3}v \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial G}{\partial v}(u,v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{2}{3}u \end{pmatrix}$$

Et le vecteur normal associé à cette paramétrisation est

$$N(u,v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{2}{3}v \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{2}{3}u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}v \\ \\ \frac{2}{3}u \\ \\ 1 \end{pmatrix}$$

On a alors

$$\mathcal{S} = \iint_S d\sigma = \iint_{[-1,1]^2} ||N(u,v)||dudv$$
$$= \iint_{[-1,1]^2} \sqrt{1+\frac{4}{9}(u^2+v^2)}dudv$$

Au vue de la fonction à intégrer, il est préférable ici de passer en coordonnées polaire, à l'aide du changement de variables suivant :

$$\begin{cases} u(r,\theta) & = & r\cos(\theta) \\ v(r,\theta) & = & r\sin(\theta) \end{cases}$$

On a alors

— $dudv = rdrd\theta$

— $\sqrt{1+\frac{4}{9}(u^2+v^2)} = \sqrt{1+\frac{4}{9}r^2}$

et

$$\mathcal{S} = \iint_{D_{(r,\theta)}} \sqrt{1+\frac{4}{9}r^2}\ rdrd\theta$$

où $D_{(r,\theta)}$ correspond au carré $[-1,1]^2$ décrit à l'aide des coordonnées polaires.

Cette description n'est pas simple. Cependant, la surface S étant symétrique, on peut se contenter d'étudier la partie du toit située au dessus du triangle T défini par

$$T = \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4},\quad 0 \leqslant r \leqslant \frac{1}{\cos(\theta)}\right\}$$

On a alors

$$\mathcal{S} = 4\iint_T r\sqrt{1+\frac{4}{9}r^2}drd\theta$$
$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{\frac{1}{\cos(\theta)}} r\sqrt{1+\frac{4}{9}r^2}dr\right)d\theta$$
$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{9}{8}\frac{(1+\frac{4}{9}r^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^{\frac{1}{\cos(\theta)}} d\theta$$
$$= 3\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1+\frac{4}{9\cos^2(\theta)}\right)^{\frac{3}{2}} d\theta$$

Cette intégrale est fastidieuse à calculer de façon exacte. On peut si nécessaire confier son évaluation à un ordinateur. On obtient :

$$\mathcal{S} \approx 4.63$$

3. Le volume couvert par le toit est donné par l'intégrale suivante :

$$\begin{aligned}
\mathcal{V} &= \iint_{[-1,1]^2} \frac{2}{3}(1 - xy)dxdy \\
&= \frac{2}{3}\left(\iint_{[-1,1]^2} dxdy - \iint_{[-1,1]} xydxdy\right) \\
&= \frac{2}{3}\left(4 - \left(\int_{-1}^{1} xdx\right)\left(\int_{-1}^{1} ydy\right)\right) \\
&= \frac{8}{3} - \left(\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1}\right)^2 \\
&= \frac{8}{3}
\end{aligned}$$

⋆ ⋆

⋆