CONTRÔLE CONTINU

Compléments d'intégration

Nom : .... Prénom : ....

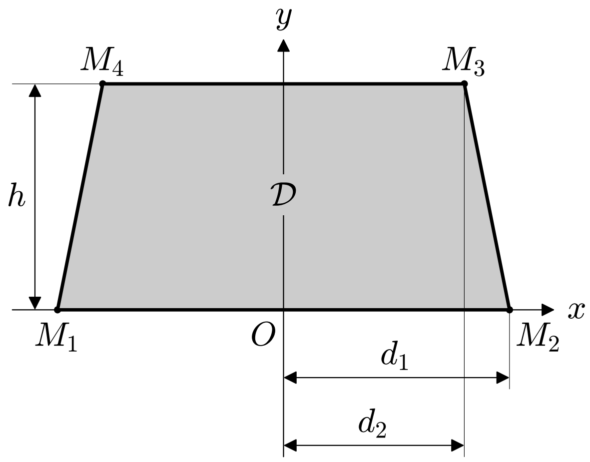
Durée : 1h30 *Les calculatrices sont autorisées.*

Tous les exercices sont indépendants.
Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation.

Exercice 1 Dans le plan muni d'un repère orthonormé (xOy), on note $\mathcal{D}$ le domaine (représenté ci-dessous) délimité par le trapèze $T = (M_1M_2M_3M_4)$ défini par

$$M_1 = (-d_1, 0), \quad M_2 = (d_1, 0), \quad M_3 = (d_2, h), \quad M_4 = (-d_2, h)$$

où d_1, d_2 et h sont des constantes strictement positives fixées.



On souhaite déterminer la position du centre gravité G de $\mathcal{D}$.

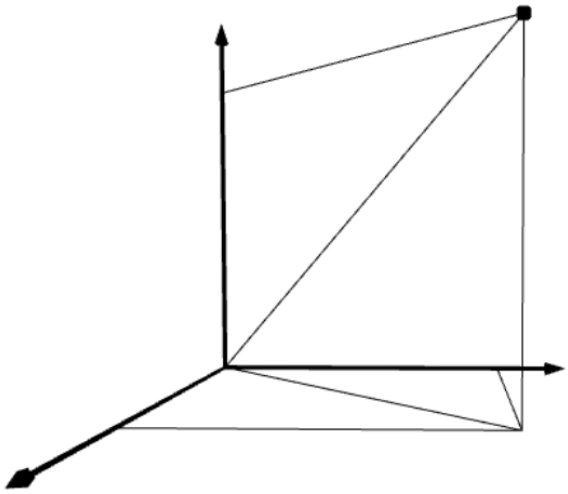
1. Déterminer l'aire $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ de $\mathcal{D}$ à l'aide d'arguments géométriques élémentaires.
2. Pour chacune des droites $\Delta_1 = (M_1M_4)$ et $\Delta_2 = (M_2M_3)$, déterminer une équation de droite de la forme
$$\Delta_i \,:\, x = \alpha_i y + \beta_i, \quad i \in \{1, 2\}$$
3. En déduire une description du domaine $\mathcal{D}$ adapté au calcul intégral sur $\mathcal{D}$.
4. Déterminer les coordonnées cartésiennes (x_G, y_G) de G.
Note : on pourra s'appuyer sur des arguments de symétrie pour éviter certains calculs.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 1. *Coordonnées cylindriques*

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on note respectivement (x, y, z) et (r, θ, z) les coordonnées cartésiennes et cylindriques d'un point M de l'espace.

(a) Représenter géométriquement ces différentes coordonnées sur le schéma ci-dessous :



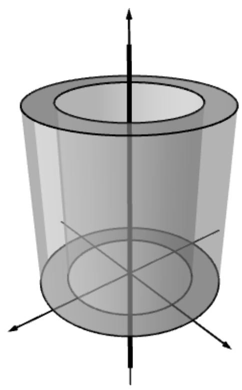
(b) Compléter les égalités ci-dessous :

$$\begin{cases} x(r,\theta,z) & = & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y(r,\theta,z) & = & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ z(r,\theta,z) & = & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

(c) En déduire l'expression de l'élément de volume dV en coordonnées cylindriques.

2. *Application*

Calculer le moment d'inertie d'un cylindre creux par rapport à son axe de symétrie représenté ci-contre. On notera h la hauteur du cylindre et respectivement $R_1 < R_2$ le rayon intérieur et le rayon extérieur.

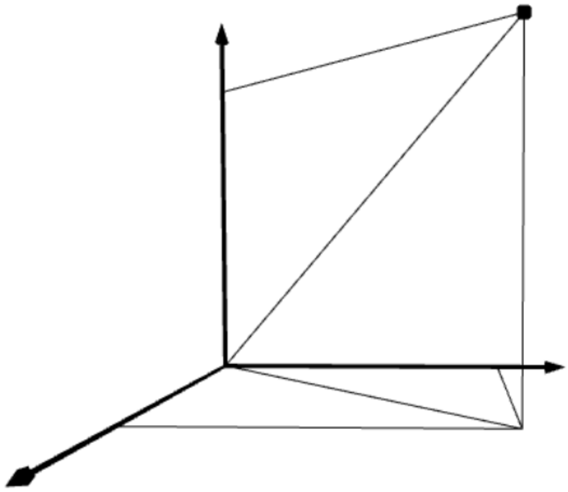


⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 1. *Coordonnées sphériques*

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on note respectivement (x, y, z) et (r, θ, φ) les coordonnées cartésiennes et sphériques d'un point M de l'espace.

(a) Représenter géométriquement ces différentes coordonnées sur le schéma ci-dessous :



(b) Compléter les égalités ci-dessous :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x(r,\theta,\varphi) & = & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y(r,\theta,\varphi) & = & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z(r,\theta,\varphi) & = & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

2. *Application*

Dans ce repère, on considère la sphère $\mathcal{S}_R$ de rayon $R > 0$, centrée au centre du repère et plongée dans le champ de vecteurs

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (x,y,-z) \end{array}$$

(a) Construire une paramétrisation des coordonnées cartésiennes des points de la sphère $\mathcal{S}_R$ basée sur les coordonnées sphériques.

(b) Montrer à l'aide d'une intégrale de surface que le flux de Φ sortant de la sphère $\mathcal{S}_R$ vérifie

$$F_{\text{ext.}}(\Phi, \mathcal{S}_R) = \frac{4}{3}\pi R^3$$

(c) Commenter le résultat obtenu.

⋆ ⋆
⋆

CORRECTION

Compléments d'intégration - 2020-2021

Exercice 1 :

1. D'après la formule de l'aire d'un trapèze, on a
$$\mathcal{A}(\mathcal{D}) = h \times (d_1 + d_2)$$
2. La droite (M_1M_4) passant les points $M_1 = (-d_1, 0)$ et $M_4 = (-d_2, h)$, on a d'une part
$$\alpha_1 = \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{d_1 - d_2}{h}$$
D'autre part, cette droite passant par le point $M_1(-d_1, 0)$, l'abscisse à l'origine β_1 vérifie
$$\beta_1 = -d_1$$
d'où
$$(M_1M_4) \, : \, x = \frac{d_1 - d_2}{h}\, y - d_1$$
De même, la droite (M_2M_3) passant les points $M_2 = (d_1, 0)$ et $M_3 = (d_2, h)$, on a d'une part
$$\alpha_2 = \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{d_2 - d_1}{h}$$
D'autre part, cette droite passant par le point $M_2(d_1, 0)$, l'abscisse à l'origine β_2 vérifie
$$\beta_2 = d_1$$
d'où
$$(M_2M_3) \, : \, x = \frac{d_2 - d_1}{h}\, y + d_1$$
3. D'après les calculs effectués ci-dessus, on a
$$\mathcal{D} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \frac{d_1 - d_2}{h}\, y - d_1 \leqslant x \leqslant \frac{d_2 - d_1}{h}\, y + d_1, \quad 0 \leqslant y \leqslant h \right\}$$
4. Par symétrie, le centre de gravité G de $\mathcal{D}$ se situe sur l'axe (Oy). On en déduit $x_G = 0$. Par ailleurs, on a
$$y_G = \frac{1}{\mathcal{A}(\mathcal{D})} \iint_{\mathcal{D}} y\, dS$$
Or, d'après la description de $\mathcal{D}$ donnée ci-dessus, on a
$$\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{D}} y\, dS &= \int_{y=0}^{h} \left(\int_{x=\frac{d_1-d_2}{h}\, y - d_1}^{\frac{d_2-d_1}{h}\, y + d_1} y\, dx \right) dy \\
&= \int_0^h y \left(\frac{d_2 - d_1}{h}\, y + d_1 - \frac{d_1 - d_2}{h}\, y + d_1 \right) dy \\
&= 2 \int_0^h \left(\frac{d_2 - d_1}{h}\, y^2 + d_1\, y \right) dy \\
&= 2 \left[\frac{d_2 - d_1}{h}\, \frac{y^3}{3} + d_1 \frac{y^2}{2} \right]_0^h \\
&= 2h^2 \left(\frac{d_2 - d_1}{3} + \frac{d_1}{2} \right) \\
&= h^2\, \frac{d_1 + 2d_2}{3}
\end{aligned}$$

On en déduit

$$y_G = \frac{1}{h\,(d_1+d_2)} \times h^2\,\frac{d_1+2d_2}{3} = \frac{h(d_1+2d_2)}{3(d_1+d_2)}$$

d'où

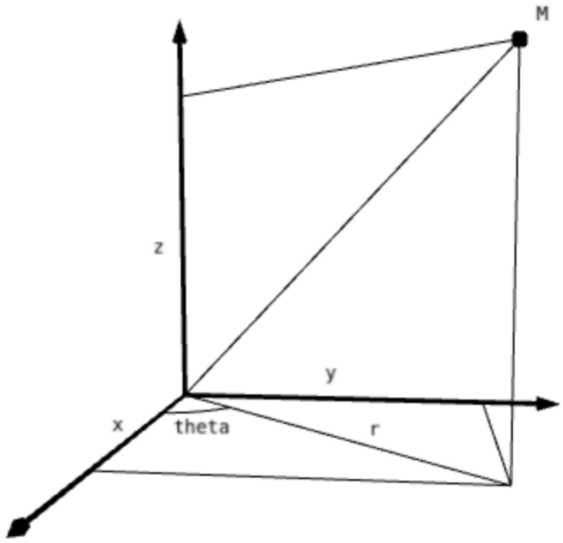
$$G = \left(0, \frac{h(d_1+2d_2)}{3(d_1+d_2)}\right)$$

Note : on peut vérifier ici que l'on retrouve les résultats connus dans les cas $d_2 = d_1$ et $d_2 = 0$.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 :

1. (a)



(b) D'après le formules de trigonométrie dans le triangle rectangle, on a

$$\begin{cases} x(r,\theta,z) &= r\cos(\theta) \\ y(r,\theta,z) &= r\sin(\theta) \\ z(r,\theta,z) &= z \end{cases}$$

(c) Par définition, l'élément de volume dV en coordonnées cylindriques est donné par

$$dV = |\mathrm{Jac}(r,\theta,z)|drd\theta dz$$

où

$$\mathrm{Jac}(r,\theta,z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r}(r,\theta,z) & \frac{\partial x}{\partial \theta}(r,\theta,z) & \frac{\partial x}{\partial z}(r,\theta,z) \\ \frac{\partial y}{\partial r}(r,\theta,z) & \frac{\partial y}{\partial \theta}(r,\theta,z) & \frac{\partial y}{\partial z}(r,\theta,z) \\ \frac{\partial z}{\partial r}(r,\theta,z) & \frac{\partial z}{\partial \theta}(r,\theta,z) & \frac{\partial z}{\partial z}(r,\theta,z) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= r\left(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)\right) = r$$

d'où

$$dV = r\,drd\theta dz$$

(d) Par définition, le moment d'inertie cherché est donné par

$$I_{(Oz)} = \iiint_{\mathcal{C}} d(M, (Oz))^2 \, dV$$

Par ailleurs, en coordonnées cylindriques, on a d'une part

$$d(M, (Oz)) = r$$

et d'autre part

$$\mathcal{C} = \left\{ (r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 \; / \; R_1 \leqslant r \leqslant R_2, \; 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \; 0 \leqslant z \leqslant h \right\}$$

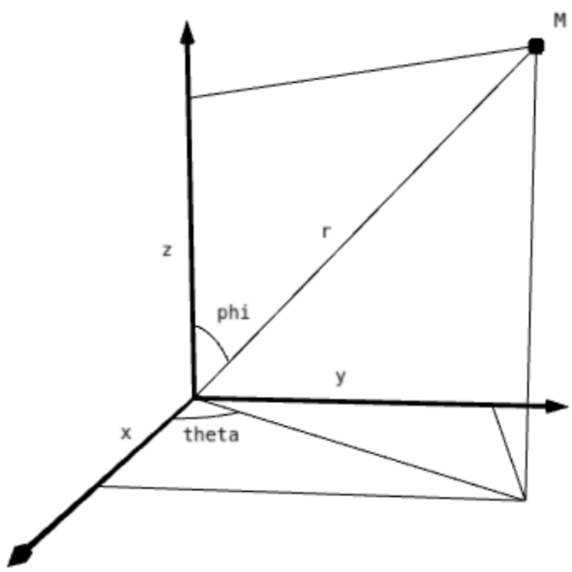
D'où

$$\begin{aligned} I_{(0z)} &= \int_{R_1}^{R_2} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^h r^3 \, dz \right) d\theta \right) dr \\ &= \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_0^h dz \right) \left(\int_{R_1}^{R_2} r^3 dr \right) \\ &= \frac{\pi h}{2} \left(R_2^4 - R_1^4 \right) \end{aligned}$$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 :

1. (a)



(b) D'après les résultats de trigonométrie dans le triangle rectangle, on a

$$\begin{cases} x(r, \theta, \varphi) &= r \cos(\theta) \sin(\varphi) \\ y(r, \theta, \varphi) &= r \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ z(r, \theta, \varphi) &= r \cos(\varphi) \end{cases}$$

2. (a) En coordonnées sphériques, la sphère $\mathcal{S}_R$ peut être décrite par

$$\mathcal{S}_R = \{(R,\theta,\varphi),\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi\}$$

Ainsi, d'après le lien existant entre les coordonnées sphériques et les coordonnées cartésiennes, une paramétrisation des coordonnées cartésiennes des points de la sphère $\mathcal{S}_R$ est

$$\begin{array}{rcccc} G & : & [0,2\pi]\times[0,\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & & (\theta,\varphi) & \longmapsto & (R\cos(\theta)\sin(\varphi), R\sin(\theta)\sin(\varphi), R\cos(\varphi)) \end{array}$$

(b) Par définition, en s'appuyant sur la paramétrisation ci-dessus, on peut exprimer le flux du champ de vecteurs Φ sortant de la sphère $\mathcal{S}_R$ par

$$F_{\text{ext.}}(\Phi,\mathcal{S}_R) = \iint_{\mathcal{S}_R} \Phi(M)\cdot\overrightarrow{dn_{\text{ext.}}} = \iint_{[0,2\pi]\times[0,\pi]} \Phi(M(\theta,\varphi))\cdot\overrightarrow{N_{\text{ext.}}(\theta,\varphi)}\,d\theta d\varphi$$

où

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{N_{\text{ext.}}(\theta,\varphi)} &= \pm\frac{\partial G}{\partial\theta}(\theta,\varphi)\wedge\frac{\partial G}{\partial\varphi}(\theta,\varphi) \\
&= \pm\begin{pmatrix} -R\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ R\cos(\theta)\sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix} R\cos(\theta)\cos(\varphi) \\ R\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ -R\sin(\varphi) \end{pmatrix} \\
&= \pm R^2\sin(\varphi)\begin{pmatrix} -\cos(\theta)\sin(\varphi) \\ -\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ -\cos(\varphi) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Dans le vecteur $\begin{pmatrix} -\cos(\theta)\sin(\varphi) \\ -\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ -\cos(\varphi) \end{pmatrix}$, on reconnaît, au signe près, les coordonnées cartésiennes d'un point de la sphère de rayon 1. Étant donné le signe de la quantité $R^2\sin(\varphi)$ ($\geqslant 0$), le vecteur normal <u>sortant</u> de la sphère est donc

$$\overrightarrow{N_{\text{ext.}}(\theta,\varphi)} = R^2\sin(\varphi)\begin{pmatrix} \cos(\theta)\sin(\varphi) \\ \sin(\theta)\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

En tout point $M(r,\theta) = (R\cos(\theta)\sin(\varphi), R\sin(\theta)\sin(\varphi), R\cos(\varphi))$ de la sphère $\mathcal{S}_R$, on a donc

$$\begin{aligned}
\Phi(M(\theta,\varphi))\cdot\overrightarrow{N_{\text{ext.}}(\theta,\varphi)} &= R^2\sin(\varphi)\begin{pmatrix} R\cos(\theta)\sin(\varphi) \\ R\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ -R\cos(\varphi) \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \cos(\theta)\sin(\varphi) \\ \sin(\theta)\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix} \\
&= R^3\sin(\varphi)\left(\cos^2(\theta)\sin^2(\varphi)+\sin^2(\theta)\sin^2(\varphi)-\cos^2(\varphi)\right) \\
&= R^3\sin(\varphi)(\sin^2(\varphi)-\cos^2(\varphi)) \\
&= R^3\sin(\varphi)(1-2\cos^2(\varphi))
\end{aligned}$$

et le flux cherché est

$$
\begin{aligned}
F_{\text{ext.}}(\Phi, \mathcal{S}_R) &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi} R^3 \sin(\varphi)(1 - 2\cos^2(\varphi))\, d\varphi \right) d\theta \\
&= R^3 \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_0^{\pi} \sin(\varphi) - 2\sin(\varphi)\cos^2(\varphi)\, d\varphi \right) \\
&= 2\pi R^3 \left[-\cos(\varphi) + \frac{2}{3}\cos^3(\varphi) \right]_0^{\pi} \\
&= 2\pi R^3 \left(1 - \frac{2}{3} - \left(-1 + \frac{2}{3} \right) \right) \\
&= \frac{4}{3}\pi R^3
\end{aligned}
$$

(c) On retrouve ici le volume de la sphère $\mathcal{S}_R$. Cela illustre le théorème de Green-Ostrogradsky puisque celui-ci assure que l'intégrale de surface que l'on a calculée est égale à

$$\iiint_{\mathcal{B}_R} \operatorname{div}(\Phi(M))\, dV = \iiint_{\mathcal{B}_R} 1\, dV$$

la divergence du champ Φ étant ici constante égale à 1.

⋆ ⋆
⋆